

Schwingungskopplung durch modale Druckfelder in nichtrotierenden Labyrinthdichtungen

Vom Fachbereich Maschinenbau

an der Technischen Universität Darmstadt

zur

Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Gerhard Schuck

aus Rockenhausen

Berichterstatter:

Prof. Dr.-Ing. R. Nordmann

Mitberichterstatter:

Prof. Dr. rer. nat. M. Schäfer

Tag der Einreichung:

30. Juni 2009

Tag der mündlichen Prüfung:

25. November 2009

Darmstadt 2009

D17

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	iv
1 Einleitung	1
1.1 Einführung in das Thema	1
1.2 Stand der Forschung	4
1.3 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit	9
2 Modellierung der Systemkomponenten	12
2.1 Anwendungen der Methode der finiten Elemente	12
2.2 Finite-Elemente-Modelle der Strukturen	18
2.3 Finite-Elemente-Modelle des Druckfeldes	19
3 Berechnung der Labyrinthströmung	20
3.1 Einfluss der Labyrinthströmung auf das gekoppelte System	20
3.2 Numerische Strömungsberechnungen	21
3.3 Periodische Druckänderung im Labyrinth	22
3.4 Periodische Strömungsänderungen im Dichtspalt	24
4 Experimentelle Untersuchungen	26
4.1 Vorbemerkungen zum experimentellen Teil	26
4.2 Eigenschaften des Prüfstandes	27
4.3 Sensorik und Messwerterfassung	31
4.4 Erweiterte Sensoranordnung	32
4.5 Überlagerung von Druck- und Strukturschwingungen zu umlaufenden Wellen	34
4.6 Identifikation und Auswahl der Messungen	36
4.7 Ergebnisse der Messungen	40
4.7.1 Vorbemerkungen	40
4.7.2 Messungen mit hochdruckseitiger Kavität	41
4.7.3 Messungen mit niederdruckseitiger Kavität	47
5 Modale Druckfelder	54
5.1 Modellbildung der Druckfelder	54
5.1.1 Akustische Wellengleichung und HELMHOLTZ-Gleichung	54
5.1.2 Erweiterung der akustischen Wellengleichung	58

5.1.3	Quantitative Bestimmung der Koeffizienten der erweiterten Eigenwertgleichung	61
5.1.4	Bestimmung der Randbedingungen	65
5.1.5	Auswirkungen von Koeffizientenvariationen auf die Druckeigenform	67
5.2	Ergebnisse der Druckfeldberechnung	71
5.2.1	Kriterien für die Auswahl der Vergleichsmessungen	71
5.2.2	Modelle der Druckfelder in hochdruckseitiger Kavität	71
5.2.3	Modelle der Druckfelder in niederdruckseitiger Kavität	74
6	Simulation der gekoppelten Labyrinthschwingungen	80
6.1	Ausgangssituation für die Modellierung	80
6.2	Energiegleichgewicht bei stationären Schwingungen	82
6.3	Berechnung der Amplitudenverstärkung des Zwei-Massen-Schwingers . .	84
6.4	Ergebnisse der Simulationsrechnungen	85
6.4.1	Darstellungsweise der Simulationsrechnungen	85
6.4.2	Simulationsergebnisse bei Schwingungen mit hochdruckseitiger Kavität	87
6.4.3	Simulationsergebnisse bei Schwingungen mit niederdruckseitiger Kavität	90
6.4.4	Schwingungen des weichen Rotor14 mit dem steifen Stator88 . . .	94
7	Zusammenfassung	97

Nomenklatur

LATEINISCHE BUCHSTABEN

A	$[m^2]$	Fläche
a	$[m/s]$	adiabate Schallgeschwindigkeit
b	$[m]$	Breite
c	$[N/m^5]$	Koeffizient der NAVIERschen Gleichung (volumenbezogen)
D	$[-]$	materielle Ableitung
D	$[Ns/m]$	Dämpfungskoeffizient
d	$[-]$	modale Dämpfung
E	$[N/m^2]$	Elastizitätsmodul
E_{kin}	$[Nm]$	kinetische Energie der Spaltströmung
e	$[Nm/kg]$	massebezogene Energie
F	$[N]$	Kraft
f	$[Hz]$	Frequenz
f_{ak}	$[Hz]$	Resonanzfrequenz der Labyrinthkammer
f_V	$[N/m^3]$	Volumenkraft
f_A	$[N/m^2]$	Flächenkraft
K	$[N/m^3]$	Volumenkraft
K	$[N/m]$	Steifigkeitskoeffizient
k	$[N/m]$	Koppelsteifigkeit
k	$[2\pi/m]$	Wellenzahl
kn	$[-]$	Knotenzahl
M	$[kg]$	Massekoeffizient
m	$[kg]$	Masse
n	$[m]$	Normalenvektor
p	$[Pa]$	Druck
q	$[m^2/s^2]$	Koeffizient der NEUMANN-Randbedingung
R_{ij}	$[N/m^5]$	Spannungstensor (volumenbezogen)
R	$[Nm/(kg \cdot K)]$	spezifische Gaskonstante von Luft
r	$[m]$	Ortsvektor
r_e	$[m]$	Freiheitsgrad (elementbezogen)
S_D	$[m]$	Umfangslänge der Dichtkammer
s	$[m]$	Wegkoordinate
T_i	$[N/m^4]$	Komponenten der Steifigkeitsmatrix (volumenbezogen)
T	$[K]$	thermodynamische Temperatur
t	$[s]$	Zeit

u	$[m]$	Verschiebung
V	$[m^3]$	Volumen
v	$[m/s]$	Geschwindigkeit
\hat{v}	$[m/s]$	Schnelle
v_s	$[m/s]$	Strömungsgeschwindigkeit
W_{el}	$[Nm]$	Verformungsenergie
W_{kin}	$[Nm]$	kinetische Energie
W_i	$[Nm]$	innere Arbeit
W_a	$[Nm]$	äußere Arbeit
w	$[m]$	Auslenkung
x	$[m]$	Wegkoordinate
y	$[m]$	Wegkoordinate

GRIECHISCHE BUCHSTABEN

δ	$[-]$	Bezeichnung virtueller Größen
ε	$[m/m]$	Dehnung
η	$[m]$	Wellenlänge
ϕ	$[-]$	Phasenwinkel der Kreisfrequenz
ϕ	$[m^2/s]$	Geschwindigkeitspotential
φ	$[m]$	Testfunktion
γ	$[-]$	Scherwinkel
κ	$[-]$	Isentropenexponent
λ	$[N/m^2]$	LAMMÉsche Konstante
μ	$[N/m^2]$	LAMMÉsche Konstante
ν	$[-]$	Querdehnzahl
ω	$[2\pi/s]$	Kreisfrequenz
ω_0	$[2\pi/s]$	Eigenkreisfrequenz
ρ	$[kg/m^3]$	Dichte
σ	$[N/m^2]$	Normalspannung
θ	$[-]$	Phasenwinkel der Wellenzahl

INDIZES

E	Element
e	Elementnummer
F	Fluid
i	Laufindex
j	Laufindex
K	Labyrinthkammer
N	Knoten
R	Rotor
S	Stator

1 Einleitung

1.1 Einführung in das Thema

Labyrinthdichtungen sind berührungslose Dichtungen, die in nahezu allen Arten von Turbomaschinen eingesetzt werden und Bereiche unterschiedlichen Druckes voneinander trennen. Ihr Funktionsprinzip beruht auf einer Abfolge von engen Drosselstellen (Dichtspalte) und Erweiterungen (Labyrinthkammern), die zu großem Strömungswiderstand und Energiedissipation führen. Durch diese Eigenschaften kann auf kleinem Raum ein hohes Druckgefälle bei minimalem Massestrom (Leckage) ohne Berührung von Bauteilen realisiert werden. Bei optimaler Funktion kombinieren Labyrinthdichtungen daher eine gute Dichtwirkung mit Verschleißfreiheit und hoher thermischer Belastbarkeit, woraus ihre Eignung insbesondere für den Gebrauch in Gasturbinen und Flugtriebwerken resultiert. In Flugzeugtriebwerken führen Leichtbauanforderungen zu dünnwandigen und flexiblen Konstruktion, wie sie in Bild 1.1 zu sehen sind. Die Labyrinth sind überwiegend als einfache Durchblicklabyrinth oder in gestufter Anordnung konstruiert, um eine axiale Montage auf der Triebwerkswelle zu ermöglichen. Gelegentlich treten Schwingungsprobleme bei Labyrinthdichtungen dieser Bauart auf, die trotz vorhandener Konstruktions- und Auslegungskriterien nicht vorhersehbar sind. Daraus kann geschlossen werden, dass die bestehenden Auslegungskriterien nicht gänzlich umfassend sind und die Anregungs- und Koppelmechanismen, die zu den Schwingungsproblemen führen, nicht vollständig bekannt sind.

Insbesondere bei leichtbauenden Flugzeugtriebwerken gibt es zwischen den Oberflächen der flexiblen Dichtungsstrukturen ringförmige Hohlräume (Kavitäten), deren Einfluss auf das Schwingungsverhalten der angrenzenden Strukturen nicht zu vernachlässigen ist. Wie in der Abbildung zu sehen ist, befindet sich die Kavität zumeist zwischen dem Labyrinth und dem Befestigungsflansch der Struktur. Die Befestigungsseite und damit die Position der Kavität relativ zur Strömung wird als Hoch- oder Niederdruckbefestigung (HD-Befestigung bzw. ND-Befestigung) bezeichnet und ist ein wesentlicher Betriebsparameter, da die Strömungsfelder von Einstrom- und Ausstromspalt deutliche Unterschiede aufweisen. Vermutungen bezüglich der Interaktion zwischen akustischen Druckschwingungen in der Kavität und den Strukturoberflächen wurden bereits früh formuliert, sie führten jedoch nur zu einfachen Konstruktionsrichtlinien, in denen anhand der Umfangslänge der Kavität und der Gastemperatur akustische Resonanzfrequenzen abgeschätzt werden. Damit bleibt die räumliche Ausdehnung der Druckfelder in der Kavität unberücksichtigt. Mit den gleichen eindimensionalen Abschätzungen werden in zahlreichen Stabilitätskriterien auch akustische Resonanzfrequenzen der Laby-

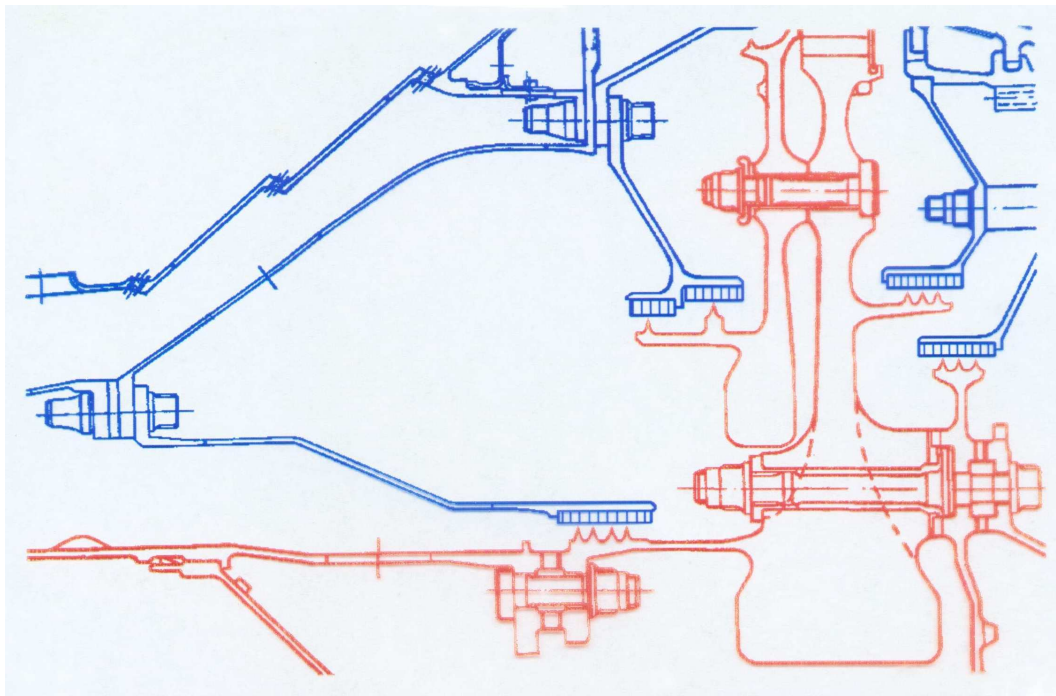


Abbildung 1.1: Dünnwandige Labyrinthdichtungen in einem Flugzeugtriebwerk

rinthkammern bestimmt, denen ein wesentlicher Einfluss auf das Schwingungsverhalten der Dichtungen zugeschrieben wird. Keines der Stabilitätskriterien, in dem akustische Effekte der beschriebenen Art berücksichtigt werden, beschreibt jedoch in konkreter Weise einen Mechanismus, der zur beobachteten Schwingungsanregung bzw. Destabilisierung des Schwingungssystems führt. Einige Stabilitätskriterien sind durch konkrete Schadensfälle an Turbinen motiviert und erweisen sich als schwer verallgemeinerbar, teilweise sogar als widersprüchlich.

Die Anregung und Anfachung der Strukturschwingungen von Labyrinthdichtungen resultiert aus der Interaktion der flexiblen Strukturen mit der Strömung im Labyrinth. Es handelt sich um selbsterregte Schwingungen, da eine Energiezufuhr aus dem Fluid auf die Dichtungsstrukturen erfolgt. Die Schwingungen der Dichtungen werden stets bei einer diskreten Frequenz gemessen, die für alle Systemkomponenten gleich ist, aber zumeist deutlich von den modalen Eigenfrequenzen der beiden Strukturen und des Druckfeldes abweicht. Die Schwingung der beiden Strukturen wird also durch das modale Druckfeld in der dazwischen liegenden Kavität gekoppelt. Das modale Druckfeld in der Kavität wirkt als Koppelsteifigkeit, da es die Strukturoberflächen mit einer Druckkraft beaufschlagt, die nahezu phasengleich und proportional zur Auslenkung der Strukturen wirkt. Die Erregerkraft resultiert aus der zeitlichen Druckänderung im Labyrinth infolge der periodischen Änderung der Dichtspalthöhe und kann mittels einfacher statistisch stationärer Strömungsrechnungen bestimmt werden.

Die Interaktion der drei Systemkomponenten ist in Bild 1.2 dargestellt. Die Strukturschwingung führt zu veränderlichen Spalthöhen und damit zu lokalen und zeitlichen



Abbildung 1.2: Zusammenwirken der Komponenten des gekoppelten Systems

Änderungen von Druck und Geschwindigkeit im Strömungsfeld. Aus diesen periodischen Änderungen resultieren einerseits Druckschwankungen in der Labyrinthkammer, die als Druckkraft die Strukturschwingungen anregen, andererseits regen Geschwindigkeits- und Druckänderungen an der Grenzfläche zwischen Dichtspalt und Kavität die modalen Druckschwingungen an, die durch den Resonanzraum der Kavität verstärkt werden. Die aus den Druckfeldern in der Kavität resultierende Druckbeaufschlagung der Strukturen kann als akustische Steifigkeit oder Fluidsteifigkeit interpretiert werden.

Die in dieser Arbeit beschriebene Kopplung von Strukturschwingungen durch modale Druckfelder in der Kavität wird als eine Erweiterung bekannter Fluid-Struktur-Interaktionsmechanismen gesehen. Auf der Basis von Messungen, die an einem statischen Prüfstand mit feststehenden Dichtungen durchgeführt wurden, ist ein einfaches Modell der gekoppelten Schwingung mit zwei Freiheitsgraden entstanden. Die Messdaten und das darauf basierende Modell der gekoppelten Schwingungen beschreiben daher ausschließlich den Mechanismus der Schwingungskopplung und -anregung. Effekte, die beispielsweise aus der Rotation einer Dichtungskomponente resultieren, oder Schwingungsanregungen aus dem Betrieb realer Maschinen, konnten mit diesem Prüfstand nicht untersucht werden. Insbesondere die Beurteilung des Einflusses der gekoppelten Schwingungen auf die Rotordynamik des Triebwerks, würde daher eine erweiterte Betrachtung und evtl. experimentelle Untersuchungen an rotierenden Strukturen erfordern.

Zur Durchführung der Messungen sind für einen begrenzten Zeitraum stationäre Schwingungszustände der durchströmten Dichtungen notwendig. Da bereits kleine Änderungen der Strömungsfeldgrößen, die durch Änderungen der Druckdifferenz zwischen Ein- und Ausstromseite verursacht werden, zu sehr schnellem Auf- oder Abklingen der Schwingungen führen, müssen die in den Messungen dokumentierten Betriebspunkte als grenzstabile Zustände des gekoppelten Systems betrachtet werden. In diesen Betriebspunkten muss notwendigerweise ein Gleichgewicht bestehen zwischen der Arbeit, die das

Fluid an den Strukturen verrichtet und der Energie der Strukturschwingung bei einer festen Frequenz und Amplitude. Die gemessenen Schwingungen stellen keine Systemresonanz dar, können jedoch sowohl nahe bei Resonanzüberhöhungen als auch bei Nullstellen der Amplitudenverstärkung (Tilgungsfrequenzen) liegen. In einigen Messungen werden nahezu verschwindende Amplituden bei einer der beiden Strukturen beobachtet, was vermuten lässt, dass der Betriebspunkt für diesen Freiheitsgrad nahe bei einer Tilgungsfrequenz liegt. Diese Vermutung kann ebenso durch Simulationsrechnungen bestätigt werden, wie andere auffällige Unterschiede zwischen den Strukturamplituden, die alleine aus der Betrachtung der Systemfrequenz relativ zu den beiden Struktureigenfrequenzen nicht zu erwarten wären.

Die in dieser Arbeit beschriebene Kopplung von Strukturschwingungen durch modale Druckfelder soll als eine Form von Fluid-Struktur-Interaktion betrachtet werden, die zusätzlich zu bekannten Arten von Strömungs-Struktur-Interaktionen im Labyrinth auftreten kann. Die Möglichkeit einer Schwingungskopplung durch ausgedehnte Druckfelder außerhalb des Labyrinths ist hauptsächlich an das Vorhandensein flexibler Dichtungsstrukturen und einer angrenzenden kompressibel durchströmten Kavität geknüpft. Diese Bedingungen werden am ehesten, jedoch nicht ausschließlich, bei Flugtriebwerken erfüllt, so dass der hier beschriebene Wirkmechanismus bei einer relativ kleinen Anzahl von bislang nicht vorhersehbaren Schwingungsproblemen zu einem wesentlich verbesserten Verständnis der Ursachen und Wirkmechanismen führen kann. Dafür spricht auch die Erfahrung, dass die bekannten Stabilitätskriterien bei einem kleinen Teil der auszulegenden Dichtungen keine zuverlässige Beurteilung des Schwingungsverhaltens ermöglichen. Eine verbesserte Kenntnis der Schwingungskopplung durch modale Druckfelder kann daher hilfreich sein, eine bislang nahezu unberücksichtigte Interaktionsform in die Stabilitätsbeurteilung einzubeziehen und dadurch zu wesentlich umfassenderen und zuverlässigeren Stabilitätsaussagen zu gelangen.

1.2 Stand der Forschung

Zum Problem selbsterregter Schwingungen von flexiblen Labyrinthdichtungen in Flugzeugturbinen werden seit dem ersten Auftreten von Schadensfällen in den 1960er Jahren in unregelmäßigen und oft längeren Abständen Forschungsberichte veröffentlicht. Gegenüber stationären Maschinen mit starren Gehäusen und massiven Wellen, deren Biegeschwingungen sich in der achsnormalen Schnittebene zu Orbitalbewegungen überlagern, weisen Flugzeugturbinen durch die Konstruktionsweise der dünnwandigen Strukturen einer Vielzahl räumlicher Struktureigenformen auf, die das Schwingungsverhalten des Systems zusammen mit den Fluideigenschaften der kompressiblen Arbeitsmedien verkomplizieren. Daher erfordern experimentelle Untersuchungen an flexiblen Strukturen einen beträchtlichen messtechnischen Aufwand. Ebenso werden theoretische Ansätze zur Modellbildung und Simulation der gekoppelten Schwingungen deutlich aufwändiger und benötigen zur Verifizierung zumeist Betriebsdaten, die durch Messungen nur schwer zu ermitteln sind. In experimentellen und theoretischen Untersuchungen werden daher

häufig Vereinfachungen angewandt, um den Aufwand für die angestrebten Experimente oder Simulationsrechnungen in einem realisierbaren Rahmen zu halten. Den Methoden solcher Untersuchungen fehlt daher oft die notwendige Allgemeingültigkeit, um bei der Anwendung auf Schwingungsprobleme anderer Maschinen zu befriedigenden Aussagen zu kommen.

Die etwas vereinfachte Problemstellung bei Turbomaschinen mit sehr steifen Gehäusen und Wellen mit Biegeeigenformen ermöglicht sowohl bei den experimentellen Untersuchungen wie auch bei Simulationsrechnungen ein wesentlich besseres Verständnis der Fluid-Struktur-Interaktion in den Dichtungen. NORDMANN [NOR02] beschreibt experimentell validierte Berechnungsverfahren, die den Einfluss der Dichtungen auf die gesamte Maschine durch Masse-, Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten ausdrücken. Mit diesen rotordynamischen Koeffizienten können in mathematischen Modellen dynamische Auslegungen und Stabilitätsbeurteilungen der Maschinen durchgeführt werden. Die Berechnungen des Strömungsfeldes im Labyrinth erfolgt in einem dreidimensionalen Geometriemodell der Dichtung mit dem Verfahren der finiten Differenzen. Das Berechnungsgebiet beginnt und endet mit dem ersten und letzten Dichtspalt. Die Drücke und Strömungen zu beiden Seiten der Dichtung werden vereinfachend als konstant angenommen. Vorgänge außerhalb der Labyrinthdichtung werden daher nicht berücksichtigt. Ferner bietet NORDMANN eine umfassende Liste von Literaturstellen zum Stabilitätsverhalten von Gas- und Flüssigkeitsdichtungen und deren Einfluss auf die Rotordynamik von Maschinen mit starren Gehäusen und Wellen mit Biegeeigenformen.

Eine weitere Vereinfachung stellt der Verzicht auf rotierende Prüfstandteile dar, der allen bekannten experimentellen Untersuchungen und auch dieser Arbeit zugrunde liegt. ALFORD (1975), ABBOTT (1981), BEHNKE (1991), KISSEL (1997) und ZIEGLER (1998) beziehen sich in ihren nachfolgend beschriebenen Arbeiten auf Versuchsergebnisse, die an Prüfständen mit unbeweglichen Dichtungsstrukturen gewonnen werden. An solchen statischen Prüfständen wird die Befestigung der Sensorik an den Dichtungsstrukturen und die Versuchsdurchführung zwar wesentlich erleichtert, es kann jedoch nur die prinzipielle Fluid-Struktur-Interaktion des selbsterregten Systems untersucht werden. Alle Effekte, die aus der Rotation einer der beiden Dichtungsstruktur resultieren, bleiben unberücksichtigt.

Bereits 1975 formuliert ALFORD [ALF75] die Vermutung, dass sich die Kavität als akustischer Resonanzraum auf das Schwingungsverhalten der angrenzenden Dichtungsstrukturen auswirkt. Eine weitere Ausführung dieses Ansatzes oder eine genaue Beschreibung des Interaktionsmechanismus ist jedoch weder bei ALFORD, noch bei anderen Autoren zu finden. Die Berücksichtigung akustischer Effekte erfolgt durch eine einfache Abschätzung der Resonanzfrequenz des ringförmigen Hohlraumes aus der mittleren Umfangslänge und der Schallgeschwindigkeit im Betriebsmedium. Er stellt Forderungen für die Konstruktion von Labyrinthdichtungen auf, die auf den modalen Eigenfrequenzen und Eigenformen, der Strömungsrichtung und den akustischen Resonanzfrequenzen beruhen. Dabei behandelt er die Labyrinthkammern und die Kavitäten außerhalb des Labyrinths gleich hinsichtlich ihrer Wirkung auf das Schwingungsverhalten der Dichtung.

Bezogen auf die Struktureigenfrequenzen der einzelnen Moden fordert er um mindestens 20 % niedrigere akustische Resonanzfrequenzen. Weiterhin kommt in sämtlichen Stabilitätskriterien der Befestigungsseite der Dichtungen besondere Bedeutung zu. Anhand der Erfahrungen mit Schadensfällen und experimentellen Untersuchungen wird schon in den ersten Veröffentlichungen zu diesem Thema auf die Bedeutung dieses Betriebsparameters hingewiesen. ALFORD findet jedoch keine Erklärung für den Einfluss der Strömungsrichtung auf das Schwingungsverhalten der Dichtungen. Vielmehr wird die Befestigungsseite der Dichtungen von ihm lediglich als Merkmal der Dichtung betrachtet, das in Kombination mit anderen Parametern zur Stabilitätsbeurteilung dient.

LEWIS, PLATT und SMITH [LEW78] beschreiben 1978 Fälle aeroelastischer Instabilität von Labyrinthdichtungen in F100 Triebwerken. Sie klassifizieren die Ursachen für Schwingungsprobleme als mechanische, akustische und aeroelastische Anregungen. Mechanische Schwingungen resultieren aus Strukturresonanzen, die durch Kräfte aus dem Betrieb des Triebwerks angeregt werden. Als akustische Anregung nennen sie stehende oder umlaufende Druckwellen bzw. Resonanzen von Hohlräumen, die mit den Strukturresonanzen und -eigenformen wechselwirken. Aus dem Zusammenhang geht hervor, dass sie die akustischen Resonanzen vorrangig in den Labyrinthkammern vermuten. Akustische Resonanzen werden auch als "organ pipe resonances" bezeichnet und deren Frequenz als bekannt angenommen, was auf eine einfache Frequenzberechnung aus Umfangslänge und Schallgeschwindigkeit schließen lässt. Aeroelastische Instabilität resultiert aus periodischen Änderungen des Strömungsfeldes, die zu anregenden Fluidkräften auf die Strukturen führen und dadurch eine Interaktion zwischen Strukturmoden und dem kompressiblen Fluid darstellen. Sie betrachten bei der Analyse eines konkreten Schadensfalles durch Ermüdungsbrüche an einer Dichtungsstruktur die radiale Dichtspalthöhe als primäre Ursache. Zur Stabilisierung der Dichtungsstruktur wird eine Abstimmung der Spalthöhen vorgenommen, bei der die Höhe des ersten Spaltes in Strömungsrichtung deutlich vergrößert wird. Um die größere Leckage teilweise zu kompensieren, wird die Höhe des letzten Spaltes geringfügig reduziert. Der größere Leckagestrom wird als tolerierbar beschrieben.

ABBOTT [ABB81] führt 1981 eine experimentelle Stabilitätsanalyse von Labyrinthdichtungen durch, die durch einen konkreten Schadensfall mit wiederholt auftretenden Dauerbrüchen motiviert ist. Er bezieht sich auf die Veröffentlichungen von ALFORD und misst den akustischen Resonanzfrequenzen der Labyrinthkammer f_{ak} , die gemäß $a = \eta \cdot f_{ak}$ aus der Schallgeschwindigkeit des Gases a und der Wellenlänge η bestimmt wird, eine zentrale Bedeutung bei. Da er anhand der Dauerbrüche eine Schwingung dritter Ordnung mit sechs Knoten am Umfang identifiziert, entspricht die Wellenlänge in diesem Fall dem dritten Teil der mittleren Kammerlänge. Er führt die Experimente mit den originalen Bauteilen durch, die er in einem Prüfstand fest verschraubt und unter betriebsähnlichen Strömungsbedingungen zu Schwingungen anregt. Um Schwingungen mit der kritische Knotenzahl drei zu erzwingen, befestigt er sechs Massen am Umfang der Struktur. Durch Veränderung der Massen können die Struktureigenfrequenzen der Knotenzahl drei in einem gewissen Bereich um die akustische Frequenz der Labyrinthkammer variiert werden. Mit diesem Versuchsaufbau identifiziert er die Schwingungsursache als

aeroelastisches Stabilitätsproblem, bei dem zwischen Druckwelle und Strukturwelle ein Phasenunterschied von ca. 140° besteht und das Fluid eine ausreichend große Arbeit an der Dichtung verrichtet, um die Dämpfung des Systems zu kompensieren. Aus seinen experimentellen Ergebnissen leitet er ein allgemeines Prinzip für die aeroelastische Stabilität von flexiblen Dichtungen ab, das besagt, dass bei niederdruckseitiger Befestigung und Struktureigenfrequenzen unterhalb der akustischen Frequenz (weiche Strukturen) negative Fluiddämpfung und damit Instabilität des gesamten Systems auftreten kann. Umgekehrt führen bei hochdruckseitiger Befestigung Struktureigenfrequenzen oberhalb der akustischen Frequenz der Kammer zu negativer Fluiddämpfung und damit zu instabilen Schwingungen. Die Allgemeingültigkeit von ABBOTTs Stabilitätskriterien findet durch die Ergebnisse anderer Autoren keine eindeutige Bestätigung. Der Einfluss der Befestigungsseite auf das Schwingungsverhalten der Dichtungen wird jedoch zu Recht in seiner Beurteilung als wichtiger Versuchsparameter herausgestellt.

BEHNKE [BEH91] führt 1991 eine auf der Betrachtung einzelner Schwingungsmoden basierende Stabilitätsuntersuchung flexibler Labyrinthdichtungen durch. Er beschreibt zwei unterschiedliche Strukturmodelle, wobei eines der Modelle auf linearen Bewegungsgleichungen einzelner modaler Massen beruht und in einer zweiten Variante die Strukturen mit finiten Elementen modelliert werden. Diese zweidimensionalen finiten Elemente haben an jedem Knoten drei translatorische und drei rotatorische Freiheitsgrade und können durch Querkräfte belastet werden. Zur Kopplung der Strukturen beschreibt er zwei Fluidmodelle, wobei er zunächst ein nichtlineares Modell präsentiert, das auf den Bilanzgleichungen für Masse und Impuls sowie der Zustandsgleichung für ideale Gase und der Polytropengleichung basiert. Die Nichtlinearität resultiert aus der Aufspaltung der Größen in einen Konstantanteil des Zustandspunktes und einen Wechselanteil, der die periodischen Zustandsänderungen im Verlaufe einer Schwingung beschreibt. Nach Einsetzen und Ausmultiplizieren können alle Terme vernachlässigt werden, die aus dem Produkt von mehr als zwei Wechselgrößen bestehen und damit klein von höherer Ordnung sind. Werden auch die Terme vernachlässigt, die quadratisch bzw. klein von zweiter Ordnung sind, so erhält man ein weiter vereinfachtes lineares Fluidmodell, das allerdings nur für Schwingungsamplituden gültig ist, die klein sind im Vergleich zur Ruhespalthöhe. Für beide Fluidmodelle trifft er die Annahme, dass die Drücke vor und nach den beiden Dichtspalten konstant sind. Die Ergebnisse der durchgeführten Stabilitätsberechnungen stimmen weitgehend mit den Einschätzungen von ABBOTT überein, so dass auch mit dieser Simulation die an realen Dichtungen beobachteten Schwingungen und Instabilitäten nicht vollständig erklärt werden können.

KISSEL [KIS97] beschreibt 1997 den Aufbau eines Labyrinthdichtungsprüfstandes ohne rotierende Dichtungskomponente. Die geometrisch einfachen Strukturen können sowohl hochdruck- wie niederdruckseitig montiert werden. Das Betriebsmedium ist Druckluft, welche ein einfaches Durchblicklabyrinth mit einer Kammer und einem sehr geringen Ruhespaltspiel von lediglich 0.1 mm durchströmt. Die Sensorik an den Dichtungen besteht aus je zwei Wirbelstromsensoren zur Wegmessung an jeder Struktur sowie mehreren Miniatur-Drucksensoren, die in der Labyrinthkammer bündig mit der äußeren Strukturoberfläche montiert sind. Trotz der fehlenden Relativbewegung wird die inne-

re Struktur als Rotor und die äußere als Stator bezeichnet. KISSEL konzentriert sich bei der Erfassung von Messdaten auf die Druckänderungen in der Labyrinthkammer. Für die Auswertung seiner Messungen leitet er mehrere dimensionslose Kennzahlen her. Die beiden wichtigsten sind das Verhältnis der akustischen Frequenz der Labyrinthkammer zur Eigenfrequenz der Strukturen und das als dynamische Spaltweitenänderung bezeichnete Verhältnis der maximalen Schwingungsamplituden der beiden Dichtspalte. Die letzt genannte Einflussgröße geht auf einen Ansatz von EHRICH [EHR68] zurück, der 1968 die selbsterregten Schwingungen als aeroelastisches Problem beschreibt. Aus der räumlichen Schwingung des Labyrinths infolge der Eigenformen der Strukturen folgert er eine diskontinuierliche Strömung der Gasmasse über dem Labyrinthumfang als Ursache für die selbsterregten Schwingungen. KISSEL erstellt Stabilitätskarten für die gemessenen Schwingungen und versucht seine Ergebnisse auf real existierende Flugtriebwerke eines Projektpartners anzuwenden. Auch in diesem Fall zeigt sich, dass die Versuchsergebnisse und seine Auswertemethode, die nur die Strukturschwingungen und die Drücke im Labyrinth berücksichtigt, nicht ohne Weiteres auf andere Dichtungen übertragbar sind.

ZIEGLER [ZIE98] beschreibt 1998 Simulationsrechnungen zur Stabilität von Labyrinthdichtungen, zu deren Validierung er auf die experimentellen Ergebnissen von KISSEL zurückgreift. Gegenüber BEHNKE benutzt er ausschließlich FE-Modelle für die Dichtungsstrukturen. Die aus dem FE-Modell beider Strukturen resultierenden Koeffizientenmatrizen der Bewegungsgleichung ergänzt er um die geschwindigkeits- und wegproportionalen Koppelanteile, die er aus seinem Fluidmodell gewinnt. Als Fluidmodell zur Berechnung dieser dynamischen Koeffizienten wählt er ein Kontrollraumverfahren mit drei Teilvolumina (Bulk-Flow), das auf NORDMANN und WEISER [WEI89] zurückgeht. Ähnlich dem Verfahren von BEHNKE stellt er die Gleichungen zur Masse-, Impuls- und Energieerhaltung für die drei Teilvolumina auf. Der Einfluss der elastischen Strukturverformung auf die Strömung wird auch hier durch einen Störungsansatz berücksichtigt. Durch die Aufteilung der Größen in einen Konstantanteil und einen Wechselanteil können mehrere Fluidmodelle abgeleitet werden, die entweder nur die linearisierten Fluideigenschaften bei kleinen Änderungen um den Ruhezustand beschreiben, oder durch nichtlineare Terme auch größere Schwankungen bei anwachsenden Amplituden berücksichtigen. Auch ZIEGLER geht von konstanten Drücken außerhalb der Labyrinthkammer aus.

ECKERT [ECK99] beschreibt 1999 einen Schadensfall am radialen Laufrad eines Verdichters, der zur Kühlung eines zweipoligen Turbogenerators in einem Kraftwerk eingesetzt wird. Aus dem Schadensbild schließt er auf einen Dauerbruch, der durch eine bestimmte Schwingungseigenform der Deckscheibe hervorgerufen wurde. Qualitativ beschreibt er den Anregungs- und Interaktionsmechanismus, der durch das Auftreten von Druckschwingungen im Radseitenraum zum beobachteten Schwingungsschaden führt. NI [Ni99] veröffentlicht 1999 eine Stabilitätsanalyse für das Laufrad dieses Verdichters, das durch Kopplung mit einem akustischen Druckfeld im Radseitenraum zu Schwingungen angeregt wird. Die Abdichtung des Radseitenraumes erfolgt durch zwei Labyrinthdichtungen, deren periodische Änderung der Spaltströmung von beiden Autoren als Ursache

für die Entstehung des Druckfeldes erkannt wird. Die Strömungsvorgänge in den schwingenden Dichtspalten finden jedoch bei beiden Autoren in den weiteren Analysen keine Beachtung, so dass zwar der Kopplungsmechanismus beschrieben, für die Anregung des Druckfeldes durch die Spaltströmung jedoch kein Modell präsentiert wird. Zur Modellbildung der Druckmoden verwendet NI analytische Funktionen (BESSEL-Funktionen), mit deren Hilfe er modale Eigenwertgleichungen für das gekoppelte Problem herleitet. Die komplexen Wurzeln des Lösungspolynoms enthalten Parameter, die von dem Akustik-Modell des Radseitenraumes abhängig sind. Seinen Berechnungen zufolge befindet sich das System über einen weiten Frequenzbereich nahe an der Stabilitätsgrenze. Stickstoff als Arbeitsmedium verschiebt den Betriebspunkt in den instabilen Bereich, während beim Betrieb des Verdichters mit Luft Stabilität erreicht wird, was mit experimentellen Ergebnissen übereinstimmt. Das gesamte Berechnungsverfahren ist sehr spezifisch auf den betrachteten Schadensfall ausgelegt. Der Autor selbst weist auf eine Reihe von Einschränkungen hin. Auch diese Analyse kann nur bedingt als einfach anwendbares und auf andere Probleme übertragbares Verfahren betrachtet werden. Die beschriebene Analyse ist von Bedeutung, weil sie erstmals die großflächige Interaktion eines modalen Druckfeldes mit der schwingungsfähigen Struktur des Verdichterlaufrades zum Gegenstand hat.

1.3 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die Beschreibung eines Modells zur Simulation von gekoppelten Schwingungen flexibler Labyrinthdichtungen mit kompressibler Strömung. Das Modell basiert auf den Ergebnissen von Messungen, die an einem Labyrinthdichtungsprüfstand ohne rotierende Teile gewonnen wurden. Es werden daher nur der Kopplungsmechanismus und die resultierenden grenzstabilen Schwingungszustände der Dichtungen in Abhängigkeit von verschiedenen Versuchsparametern beschrieben. Das wichtigste Unterscheidungsmerkmal gegenüber bisherigen Arbeiten zu diesem Thema liegt in der Messung und Identifikation modaler Druckfelder, die außerhalb des eigentlichen Dichtungslabyrinths die Struktureoberflächen großflächig mit periodischen Druckkräften beaufschlagen. Es soll gezeigt werden, dass diese Druckfelder als Koppelsteifigkeiten betrachtet werden können, deren Druckkraft proportional zur Auslenkung der Strukturen auf deren Oberfläche einwirkt. Zur quantitativen Bestimmung der Koppelsteifigkeit wird ein mathematisches Modell der Druckeigenformen in der Kavität verwendet. Dieses beruht auf der Erweiterung der HELMHOLTZ-Gleichung, einer Eigenwertformulierung der akustischen Wellengleichung, um den Einfluss von Strömungsvorgängen auf das akustische Feld. Die Lösung der erweiterten HELMHOLTZ-Gleichung erfolgt, ebenso wie die Berechnung der Struktureigenschwingungen, mit Hilfe von Finite-Elemente-Berechnungen. Aus den Ergebnissen der numerischen Berechnungen werden die Koeffizienten eines einfachen Zwei-Massen-Modells bestimmt, welches die Bilanzierung der mechanischen Energien der gemessenen Schwingungszustände ermöglicht. Mit diesem Simulationsmodell soll schließlich der Nachweis erbracht werden, dass die gemessenen Druck- und Strukturam-

plituden typischer Schwingungszustände aus dem energetischen Gleichgewicht zwischen der anregenden Fluidarbeit im Labyrinth und der Schwingungsenergie der Strukturen resultieren.

Zunächst werden die Grundlagen für die Modelle der Komponenten des gekoppelten Systems beschrieben. Es handelt sich dabei um numerische Strömungsberechnungen für das Fluid in der Labyrinthdichtung sowie um die Anwendung der Finite-Elemente-Methode (FEM) zur Durchführung numerischer Modalanalysen der Dichtungsstrukturen und des Druckfeldes in der Kavität. Für die Strömungsberechnungen wird ein Programm genutzt, das mit der Methode der finiten Differenzen in einem zweidimensionalen Querschnitt der Labyrinthgeometrie die auftretenden Drücke und Geschwindigkeiten stationär berechnen kann. Die Ergebnisse werden durch den Vergleich mit Druckmessungen validiert. Die berechneten Strömungsgeschwindigkeiten im Dichtspalt, der an die Kavität angrenzt, sind notwendig zur quantitativen Bestimmung des konvektiven Koeffizienten in der erweiterten HELMHOLTZ-Gleichung. Mit den Strömungsberechnungen soll auch gezeigt werden, dass ohne Kenntnis von Messdaten die Fluidkräfte in der Labyrinthkammer und somit die Erregerkräfte des gekoppelten Systems bestimmt werden können. Die numerischen Modalanalysen der Strukturen und des Druckfeldes werden mit kommerziellen FE-Programmen durchgeführt.

Im darauf folgenden Abschnitt werden Aufbau, Funktionsweise und Sensorausstattung des Labyrinthdichtungs-Prüfstands beschrieben. Die Struktursteifigkeit verschiedener Dichtungsvarianten sowie die Strömungsrichtung in der Dichtung und Änderungen von Zustromdruck und Druckdifferenz zwischen Zu- und Abstromseite der Dichtung sind Versuchsparameter der Messungen. Das beobachtete Verhalten der gekoppelten Schwingungen auf Änderungen dieser Parameter wird beschrieben. Die Verwendung von Autopower- und Crosspower-Spektren erlaubt die Messung von Amplitudenwerten und Phasenbeziehungen zwischen den Messpunkten. Die Überlagerung modaler Schwingungen zu umlaufenden Wellen ermöglicht die Identifikation der Moden mittels der gemessenen Amplituden und Phasenwinkel. Die identifizierten modalen Schwingungen weisen ein typisches Frequenzverhalten hinsichtlich der Strömungsrichtung bzw. der Position der Kavität auf. Die beobachteten Unterschiede können durch die strömungsabhängige Phase zwischen dem Druckfeld und den Strukturen erklärt werden und sind von grundlegender Bedeutung für die Simulationsrechnungen.

Der folgende Abschnitt beschreibt die Modellbildung der modalen Druckfelder. Erste numerische Modalanalysen der Druckfelder in der Kavität zeigen, dass die Standardformulierung der HELMHOLTZ-Gleichung als Berechnungsmodell nicht geeignet ist, um die gemessene axiale Gestalt der Druckfelder wiederzugeben. Aus den gemessenen Druckamplituden werden durch Pegelrechnung Schnellepegel von mehr als 180 dB für die Fluidteilchen im Druckfeld bestimmt. Die hohen Teilchengeschwindigkeiten legen nahe, dass die bei der Herleitung der akustischen Wellengleichung vernachlässigten Geschwindigkeiten in den Bilanzgleichungen berücksichtigt werden müssen. Zunächst wird die Herleitung der bekannten Wellengleichung beschrieben, die dann durch entsprechende Änderungen auf die speziellen Anforderungen eines Modells modaler Druckfelder erwei-

tert wird. Aus dieser Modifikation resultiert ein weiterer Term in der Wellengleichung, in dem die Teilchenbeschleunigungen als Koeffizient des Druckgradienten auftreten. Die Beschleunigungen im zusätzlichen konvektiven Koeffizienten der partiellen Differentialgleichung (PDG) können mittels Pegelrechnung aus den Messdaten bzw. durch berechnete Strömungsgeschwindigkeiten quantitativ bestimmt werden. Auch die Randbedingungen zur Lösung der partiellen Differentialgleichung werden durch den zusätzlichen Koeffizienten beeinflusst und ihre quantitative Bestimmung wird beschrieben. Die Auswirkungen des zusätzlichen Koeffizienten und der Randbedingungen auf die Druckeigenformen wird mittels Variation der Berechnungsparameter dargestellt. Die mit dieser erweiterten Eigenwertgleichung berechneten Druckmoden zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messdaten und sind geeignet zur Berechnung der Koppelsteifigkeit in einem Simulationsmodell. Anhand mehrerer Beispiele wird ein Vergleich zwischen den berechneten Druckmoden und den gemessenen Druckfeldern durchgeführt.

Im letzten Abschnitt wird das Modell zur Simulation der gekoppelten Schwingungen beschrieben, welches auf einer Bilanzierung der Schwingungsenergie basiert. Aus den Phasenwinkeln der beobachteten Schwingungen kann geschlossen werden, dass die gemessenen grenzstabilen Zustände keine Resonanzen des Systems darstellen. Für die gemessenen Schwingungs- und Druckamplituden muss daher bei Vernachlässigung der schwachen Dämpfungskräfte ein Gleichgewicht zwischen der zugeführten Fluidarbeit und der Schwingungsenergie der Strukturen existieren. Die als Absolutwert schwer zu bestimmende Verformungsenergie der Strukturen wird durch eine Näherung aus der kinetischen Energie und der Fluidarbeit ersetzt. Die Amplitudenverstärkung bei der gemessenen Frequenz der Schwingungen kann mit einem Zwei-Massen-Modell berechnet werden. Mit der Amplitudenverstärkung kann die Näherung der Verformungsenergie um die dynamische Überhöhung vermindert werden. Daraus resultiert eine Abschätzung der Verformungsenergie, wie sie durch die statisch einwirkende Fluidarbeit hervorgerufen würde. Dieser frequenzabhängige statisch äquivalente Anteil an der Verformungsenergie wird mit der Fluidarbeit verglichen. Bei der gemessenen Frequenz müssen diese beiden Energiegrößen im Gleichgewicht stehen. Mit den Simulationsrechnungen werden mehrere gemessene Schwingungszustände, die charakteristische Frequenzen und Amplitudenwerte aufweisen, analysiert. Für jeden Einzelfall können die gemessene Frequenzen und Amplituden als notwendige Systemparameter zum Erreichen eines grenzstabilen Schwingungszustandes bestätigt werden.

2 Modellierung der Systemkomponenten

2.1 Anwendungen der Methode der finiten Elemente

In diesem Abschnitt sollen verschiedene Ausgangspunkte für die Anwendung der Finite Elemente Methode (FEM) zur Lösung kontinuumsmechanischer Probleme beschrieben werden. Bei der Modellierung der Komponenten des gekoppelten Systems wird die FEM zur Berechnung von Eigenschwingungen der Dichtungsstrukturen und des Druckfeldes in der Kavität benutzt. Die grundlegende Zielsetzung bei der Anwendung der FEM ist das Auffinden einer Näherungslösung für ein Variationsfunktional in einer Geometrie bzw. einem mathematischen Gebiet, das durch eine Diskretisierung in eine Vielzahl einzelner Elemente unterteilt ist und in denen jeweils eine Komponente der Gesamtlösung unter Berücksichtigung von Randbedingungen und geometrischen Übergangsbedingungen gegenüber den Nachbarelementen berechnet wird. Die Variationsformulierung resultiert aus der Variationsrechnung, einer mathematischen Methode, mit der Differentialgleichungen bestimmt werden können, die grundlegenden physikalischen Prinzipien genügen. So beschreibt FEYNMAN [FEY87] die Variationsmethode an einem einfachen Beispiel, das die Bestimmung der Differentialgleichung für die Trajektorie eines Teilchens im Gravitationsfeld aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung beschreibt. Er geht aus von der Differenz aus kinetischer und potentieller Energie, die er über ein Zeitintervall integriert. Von der Wirkung, dem Produkt aus Energie und Zeit, fordert er, dass sie im betrachteten Zeitintervall minimal sein soll. Aus dieser Forderung leitet er eine Variationsformulierung des Funktional ab und berechnet schließlich die bekannte Differentialgleichung $F = m\ddot{x}$. Für die Bewegung des Teilchens auf einer Wurfparabel im Schwerfeld ist damit das anfangs geforderte Energieminimum erfüllt. Bei BATHE [BAT02] werden die aus dem Variationsfunktional resultierenden Gleichungen als beherrschende Gleichung des Problems bezeichnet. Die beherrschenden Differentialgleichungen können alternativ auch als differentielle Formulierung aus dem Gleichgewicht der Systemgrößen in jedem Punkt eines Kontinuums hergeleitet werden.

Nach BATHE gibt es daher mehrere äquivalente Ausgangspunkte für die Problembeschreibung in der FEM. Neben dem direkten Aufstellen der Variationsformulierung als Gesamtpotential des Systems kann auch von den beherrschenden Gleichungen ausgegangen und der Weg der Herleitung aus einer Variationsformulierung rückwärts beschritten werden. Aus der beherrschenden DGL wird eine Integralgleichung formuliert, die durch evtl. mehrfache Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes zur Herleitung des Funk-

tionals führt. Der GAUSSsche Integralsatz kann mit der partiellen Integration im ein-dimensionalen Fall verglichen werden. Damit kann der Integralwert über die Divergenz eines Vektorfeldes im Inneren eines Gebietes berechnet werden durch Integration über den Fluss des Feldes durch die Grenzfläche des Gebietes. Die Anwendung der Integration erleichtert somit die Einbeziehung von Randbedingungen und reduziert die Ordnung der Ableitungen in der resultierenden Variationsformulierung, was das Auffinden geeigneter Ansatzfunktionen für die Näherungslösung erleichtert. Der Integrand besteht bei dem Verfahren aus der beherrschenden DGL, die mit einer Testfunktion multipliziert wurde. In der technischen Mathematik werden diese Testfunktionen als virtuelle Verschiebungen bezeichnet. Die Lösung des Problems resultiert schließlich aus der Forderung, dass die Variation des Integranden (bzw. des Gesamtpotentials) Null sein muss. Dazu wird stets vorausgesetzt, dass die virtuellen Größen an den Rändern verschwinden. Wegen der Reduzierung der Ableitungsordnung sind die Stetigkeitsanforderungen an mögliche Lösungsfunktionen ebenfalls reduziert. Die Menge der möglichen Ansatzfunktionen ist gegenüber den exakten Lösungsfunktionen deutlich erweitert und muss durch zusätzliche Bedingungen für die globale Näherungslösung eingeschränkt werden. Aus diesem Grund werden das Variationsfunktional auch als schwache Formulierung und seine Lösungsfunktionen als schwache Lösungen bezeichnet.

An einem Beispiel aus der Elastostatik zeigt NORDMANN [NOR93] die Vorgehensweise bei der FEM ausgehend vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Die Forderung nach dem Verschwinden der gesamten virtuellen Arbeit aufgrund der virtuellen Verschiebung führt zu

$$\delta W = \delta W_i - \delta W_a = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV - \int_V \delta u^T f_V dV - \int_A \delta u^T f_A dA - \sum_i \delta u_i^T F_i = 0. \quad (2.1)$$

Darin bezeichnet das erste Integral die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte. Die folgenden Integrale repräsentieren die äußeren Volumenkräfte, Oberflächenkräfte und Einzelkräfte. Die Aufteilung des Berechnungsgebietes in Einzelelemente führt zu einer Summation über die virtuellen Arbeiten aller Elemente. Betrachtet man nur die innere Arbeit eines Elementes, so erhält man

$$\delta W_{ei} = \int_{V_e} \delta \varepsilon^T \sigma dV_e, \quad (2.2)$$

wobei die virtuellen Dehnungen und Scherwinkel aus der virtuellen Verschiebung gemäß

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ und } \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3)$$

bei einachsigen Zug bzw. ebener Scherung bestimmt werden. Entsprechend der Dimension des Problems werden diese Ableitungen der Verschiebungen in einer Matrix T_2 angeordnet und geben den Zusammenhang zwischen Verzerrung und Verschiebung im Element wieder. In Vektorschreibweise folgt für diesen Zusammenhang

$$\varepsilon = T_2 u \text{ bzw. } \delta \varepsilon^T = \delta u^T T_2. \quad (2.4)$$

Die Nummerierung der Matrizen resultiert aus der späteren Anordnung im Integranden.

Im nächsten Schritt wird der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Dehnungen bzw. Scherwinkeln im Element bestimmt. In der linearen Elastostatik handelt es sich um linear elastisches Materialverhalten nach dem HOOKschen Gesetz. Dieses Werkstoffgesetz kann bei einachsigen Zug durch $\sigma = E\varepsilon$ beschrieben werden. Bei beliebigen Spannungszuständen sind die Dehnungen und Scherwinkel durch aufwändige Beziehungen mittels des Elastizitätsmoduls E und der Querkontraktionszahl ν mit den Spannungen im Element verbunden. In der Kontinuumsmechanik resultiert dieser Zusammenhang in der allgemeinsten Form aus einem Elastizitätstensor vierter Stufe, der in Anwendungen jedoch zu Matrixformulierungen vereinfacht werden kann [SCH99]. Bestandteil dieses Tensors sind die LAMMÉschen Konstanten λ und μ , für die der folgende Zusammenhang gilt:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ und } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.5)$$

Dieses Materialgesetz kann man wiederum in Matrixschreibweise darstellen, so dass aus dem Vektor der Dehnungen und Scherwinkel mit der Matrix T_3 des Materialgesetzes der Spannungsvektor resultiert. Dieser Zusammenhang wird durch

$$\sigma = T_3 \varepsilon \text{ bzw. } \sigma = T_2 T_3 u \quad (2.6)$$

in Gleichung 2.2 berücksichtigt. Ersetzt man auch noch $\delta\varepsilon^T$ im Integranden durch die entsprechende Formulierung aus Gleichung 2.4, so kann die virtuelle innere Arbeit des Elements durch Gleichung

$$\delta W_{ei} = \int_{V_e} \delta u^T T_2^T T_3 T_2 u \, dV \quad (2.7)$$

beschrieben werden. Damit ist die gesamte virtuelle Arbeit des Einzelelementes gegeben durch

$$\delta W_e = \int_{V_e} \delta u^T T_2^T T_3 T_2 u \, dV - \int_{V_e} \delta u^T f_V \, dV - \int_{A_e} \delta u^T f_A \, dA - \sum_{ie} \delta u_{ie}^T F_{ie} = 0. \quad (2.8)$$

Im nächsten Schritt wird die Verschiebung u im Inneren des Elementes durch die Linearkombination geeigneter Ansatzfunktionen und der lokalen Knotenkoordinaten r_e ausgedrückt. Dieser Zusammenhang lautet mit der Matrix T_1 der Ansatzfunktionen

$$u = T_1 r_e \text{ bzw. } \delta u^T = \delta r_e^T T_1. \quad (2.9)$$

Ersetzt man die Verschiebungen im Inneren des Elementes durch diesen Ansatz, so resultiert der folgende Ausdruck für die gesamte virtuelle Arbeit des Einzelelements:

$$\delta W_e = \delta r_e^T \left\{ \left(\int_{V_e} T_1^T T_2^T T_3 T_2 T_1 \, dV \right) r_e - \int_{V_e} T_1^T f_V \, dV - \int_{A_e} T_1^T f_A \, dA - \sum_{ie} T_1^T F_{ie} \right\} = 0 \quad (2.10)$$

Nach Multiplikation der Matrizen und Ausführung der Integrationen stellen der erste Term die Elementsteifigkeitsmatrix K und die folgenden Terme die Volumen-, Oberflächen- und Einzelkräfte am Element dar. Die gesamte Formulierung der virtuellen Arbeit ist damit auf eine Matrixgleichung reduziert:

$$\delta W_e = \delta r_e^T \{K_e r_e - F_{Ve} - F_{Ae} - F_{Ee}\} = 0 \quad (2.11)$$

Da die virtuelle Verschiebung an den lokalen Koordinaten als beliebig angenommen wurde, folgt aus dieser Gleichung, dass das Produkt aus Elementsteifigkeitsmatrix und lokaler Verschiebung gleich der Summe aller am Element angreifenden Kräfte sein muss:

$$K_e r_e = F_{Ve} + F_{Ae} + F_{Ee} \quad (2.12)$$

Schließlich erfolgt noch die Einordnung des Elementes in das Gesamtsystem, was durch das Ersetzen der lokalen durch globale Koordinaten geschieht. Die zugehörige Transformationsmatrix wird auf alle lokalen Koordinaten angewandt. SCHÄFER [SCH99] beschreibt die Eigenschaften der Ansatzfunktionen und das Vorgehen zur Bestimmung globaler Ansatzfunktionen ausführlicher. Diese Beschreibung soll hier in wenigen Sätzen zusammengefasst werden: Eine grundlegende Forderung an die Ansatzfunktionen ist die Erfüllung von Stetigkeitsanforderungen an den Elementübergängen, um die Stetigkeit der globalen Lösungsfunktion zu sichern. Funktionen, die die problembezogenen Stetigkeitsanforderungen erfüllen, werden als konforme Ansätze bezeichnet. Es ist jedoch teilweise möglich und einfacher, eine Näherungslösung aus nicht konformen Ansätzen zu konstruieren, wodurch Polynome mit niedriger Ordnung als Ansatzfunktion möglich sind. Solche Funktionen nähern beispielsweise bei Balken- oder Schalenelementen die Biegelinien durch Polygonzüge mit unstetigen Ableitungen an. Eine gängige Vorgehensweise zur Bestimmung der Ansatzfunktionen ist die Einführung von lokalen Formfunktionen. Mit diesen werden die Ansätze als Linearkombination aus den Formfunktionen mit den lokalen Freiheitsgraden der Knotenpunkte als Koeffizienten dargestellt. Diese globalen Formfunktionen sind an allen Knotenpunkten gleich Null, außer an denjenigen, die mit den lokalen Freiheitsgraden zur Ansatzfunktion beitragen. Aus dieser mathematischen Darstellungsweise der Ansatzfunktionen resultieren dünn besetzte Steifigkeitsmatrizen, die Bandstrukturen aufweisen und mit geeigneten Lösungsalgorithmen zur gesuchten Näherungslösung des Problems führen.

Zur Herleitung der FEM für dieselbe Anwendung in der Elastostatik geht SCHÄFER von der NAVIER-CAUCHYschen Gleichung der linearen Elastizitätstheorie aus. Für zeitabhängige Probleme ist sie in der Form

$$\rho \frac{D^2 u_i}{Dt^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i \quad (2.13)$$

angegeben. Darin sind die Koeffizienten λ und μ wieder die LAMMÉschen Konstanten aus 2.5. Die Zeitableitung des ersten Terms wird als materielle Zeitableitung bezeichnet und besteht aus der Summe von lokaler und konvektiver Beschleunigung. Der letzte

Term stellt die Volumenkräfte des Elements dar. Alternativ zu der hier in Tensornotation dargestellten Form der partiellen Differentialgleichung (PDG) kann auch eine Darstellung mit den Symbolen der Vektoranalysis gewählt werden. Von dieser Schreibweise wird im FE-Berechnungsprogramm FEMLAB Gebrauch gemacht [FEM00]. Die PDG lautet dann

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot c \nabla u = K \quad (2.14)$$

und ist bis auf die fehlende konvektive Beschleunigung äquivalent zu Gleichung 2.13. Dabei bezeichnet K die Volumenkräfte. Zunächst wird der Gradient der Verschiebungen bestimmt und anschließend der Divergenzoperator auf den Term angewandt. Dies entspricht der Indizierung der Ableitungen in Gleichung 2.13. Im Koeffizienten c sind die LAMMÉschen Konstanten implizit enthalten. Der Koeffizient entspricht dem bereits erwähnten Tensor vierter Stufe, der als Materialgesetz die Dehnungen mit den auftretenden Spannungen verknüpft. Berücksichtigt man weiter, dass nach den Gleichungen 2.3 die Dehnung im einachsigen Fall der Ableitung und im mehrdimensionalen Fall dem Gradienten der Verschiebungen entspricht, so wird die Äquivalenz der beiden Gleichungen ersichtlich. Der Gradient der Verschiebungen entspricht den Dehnungen, die mit dem Materialgesetz als Koeffizienten zum Spannungstensor führen. Die Divergenz des Spannungstensors steht schließlich zusammen mit den Volumenkräften in jedem Punkt der Struktur im Gleichgewicht mit den instationären Kräften, die durch die Dichte und die zweiten Zeitableitungen im ersten Term beschrieben werden.

Stationäre Probleme werden mit der NAVIER-CAUCHYschen Gleichung unter Vernachlässigung des instationären Terms beschrieben. SCHÄFER zeigt an einem Beispiel aus der linearen Elastizitätstheorie den Weg von der beherrschenden PDG zur schwachen Formulierung des Variationsfunktional. Ausgehend von der Gleichung

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i = 0 \quad (2.15)$$

gelangt er nach Multiplikation mit einer Testfunktion φ_i (virtuelle Verschiebung) und der Ausführung der Volumenintegration unter Anwendung des GAUSSschen Satzes zu der Gleichung

$$\int_V \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dV = \int_V \rho f_i \varphi_i dV + \int_S R_{ij} n_j \varphi_i dS, \quad (2.16)$$

in der der Tensor R_{ij} dem Spannungstensor und n_j dem Normalenvektor auf den Rand des Gebietes entsprechen. Die partielle Integration (GAUSSscher Satz) führen zu einer Verminderung der Ableitungsordnung in der eckigen Klammer. Zugleich wird die Testfunktion nach der Verschiebungsordinate abgeleitet, so dass daraus nach Gleichung 2.3 eine Größe resultiert, die der Dehnung entspricht. Wegen der Voraussetzung, dass die Testfunktion auf dem Rand des Gebietes zu Null wird, verschwindet bei der partiellen Integration ein Term, der an den Rändern des Gebietes ausgewertet wird. Vergleicht man Gleichung 2.16 mit Gleichung 2.1, so sind auch hier, bis auf die fehlenden Einzelkräfte, zwei ähnliche Gleichungen zu erkennen. Die eckige Klammer enthält das

Materialgesetz, das zusammen mit dem Tensor der Dehnungen auf den Spannungstensor führt. Die Ableitung der Testfunktion kann mit der virtuellen Dehnung im ersten Integral von 2.1 gleichgesetzt werden. In den weiteren Integralen taucht die Testfunktion bzw. virtuelle Verschiebung ohne Ableitung auf. Das dritte Integral enthält wiederum den Spannungstensor, dessen Fluss in Normalenrichtung über den Rand des Gebietes die Spannungsrandbedingung beschreibt. Auch in dieser Formulierung findet sich daher die Gleichsetzung von innerer Arbeit aus Spannungen und Dehnungen und den äußeren Arbeiten aus Volumen-, Rand- und evtl. Einzelkräften an den Knoten wieder.

Dieser Vergleich soll einerseits einen kurzen Überblick über die Methode der finiten Elemente geben und andererseits verdeutlichen, dass die FEM ganz allgemein ein Werkzeug zur Lösung von Differentialgleichungen in einem Gebiet darstellt. In dieser Arbeit werden neben den FE-Berechnungen der Struktureigenformen auch Eigenformen von Druckfeldern berechnet, deren beherrschende Gleichung die akustische Wellengleichung ist. Diese Gleichung lautet in der Schreibweise der FE-Software FEMLAB

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla \cdot a^2 \nabla p = 0, \quad (2.17)$$

woraus sofort die formale Übereinstimmung mit Gleichung 2.14 zu erkennen ist. Der Koeffizient des instationären Terms ist bei der akustischen Wellengleichung gleich eins und der Koeffizient der Ableitung der Systemvariablen ist in diesem Fall kein Tensor höherer Stufe, sondern eine skalare Größe. Der Koeffizient a^2 entspricht hier dem Quadrat der adiabaten Schallgeschwindigkeit. Gleichung 2.14 kann man also auch so interpretieren, dass durch sie die Ausbreitung von Strukturwellen beschrieben wird. Wegen der Tensor-Gestalt des Koeffizienten und infolge der Kopplung von räumlichen Spannungen durch die Querdehnungen im Material, treten Strukturwellen als gekoppelte Scher- und Kompressionswellen auf, während Druckwellen in einem Fluid lediglich als Verdichtungswellen in Erscheinung treten.

Zur Durchführung numerischer Modalanalysen werden aus den beherrschenden Gleichungen Eigenwertformulierungen abgeleitet. Dabei wird unter der Annahme einer zeitharmonischen Schwingung der instationäre Term eliminiert und die Gleichung eines Ausbreitungs- oder Anfangswertproblems in die eines stationären Randwertproblems umgewandelt. Für die Strukturberechnungen wurde das Programmpaket PATRAN/NASTRAN benutzt, das zum Setzen der Randbedingungen oder evtl. vorhandener äußerer Lasten an den Freiheitsgraden der Knoten entsprechende Bedingungen vorsieht. Die Berechnungsgitter sind strukturierte Gitter, bei denen die Anzahl und Position der Knoten unmittelbar festgelegt werden kann. Bei der Berechnung der Druck-eigenformen mit dem Programm FEMLAB wird das Gebiet durch ein unstrukturiertes Tetraeder-Netz (DELAUNAY-Triangulierung) diskretisiert. Die genaue Zahl und Position der Knotenpunkte ist nicht direkt bestimmbar, so dass die Randbedingungen für die einzelnen Teiloberflächen angegeben werden müssen. Auch in der Auswahl der Elemente unterscheiden sich die Programme. Während für Strukturen mit ausreichender Materialdicke zwischen einer Diskretisierung mit Volumenelementen und flächigen Schalelementen mit jeweils geeigneten Ansatzfunktionen gewählt werden kann, bietet die

Diskretisierung mit Tetraedern lediglich die Möglichkeit zur Bestimmung der Ordnung der Ansatz-Polynome. Bei einer großen Anzahl von Freiheitsgraden, wie sie zur Diskretisierung der Kavität notwendig sind, wächst mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung die Rechenzeit wegen der überproportionalen Vergrößerung der zu lösenden Gleichungssysteme sehr stark an.

2.2 Finite-Elemente-Modelle der Strukturen

Die FE-Modelle der Dichtungsstrukturen wurden mit dem Programm PATRAN erstellt und basieren auf einem strukturierten Netz mit zweidimensionalen Schalenelementen (QUAD4-Elemente), denen die Bauteildicke als Parameter zugewiesen wird. Die Elemente haben lediglich vier Knotenpunkte, jedoch ist die Ordnung der verwendeten Ansatzfunktionen derart, dass neben den Verschiebungen auch die Biegewinkel in der Lösung berücksichtigt werden. Die Elemente können durch Einzelkräfte an den Knoten und Flächenkräfte belastet werden. Die Einspannbedingungen am Befestigungsflansch der Strukturen sind durch Nullsetzen der Freiheitsgrade an den Knoten entlang des Teilkreises der Verschraubung berücksichtigt. Die Dichtstreifen des Labyrinths werden mit demselben Elementtyp modelliert. Um Materialdopplung und damit eine Vergrößerung der Steifigkeit an den Verbindungsknoten zwischen Dichtstreifen und Strukturschaft zu vermeiden, sind die Knoten der Dichtstreifen räumlich von den Knoten des Schaftes getrennt. Sie liegen an der Strukturoberfläche, sind jedoch bezüglich ihrer Freiheitsgrade durch Zusatzbedingungen an die Bewegung des Strukturschaftes gekoppelt. Abbildung 2.1 zeigt das deformierte FE-Netz des Rotor100 mit der Eigenform der Knotenzahl vier.

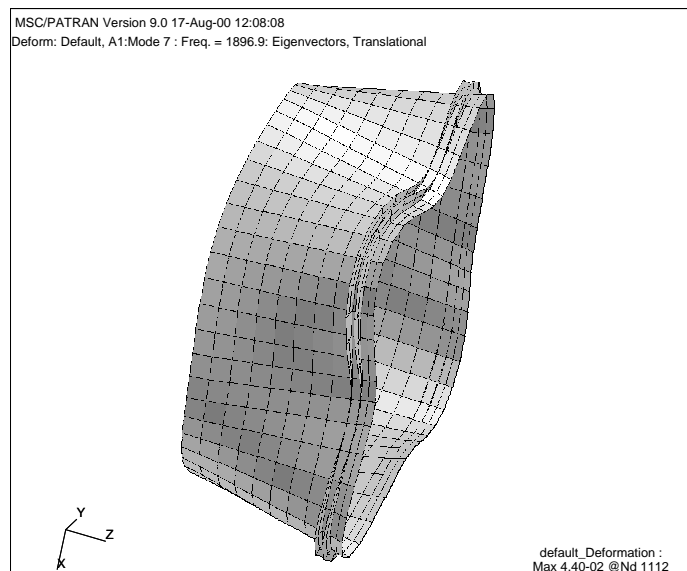


Abbildung 2.1: FE-Netz des Rotors mit der Knotenzahl vier

2.3 Finite-Elemente-Modelle des Druckfeldes

Die Diskretisierung des Fluidvolumens in der Kavität erfolgt durch eine automatische Gittergenerierung. Dabei wird ein unstrukturiertes Netz aus Tetraederelementen erzeugt (DELAUNAY-Triangulierung), dessen Elementgröße und -verteilung nur indirekt durch verschiedene Parameter kontrolliert werden kann, die die Wachstumsrate und die Anpassung der Elemente an die Oberflächen der Geometrie bestimmen. Zur Reduktion der Elementzahl wurde die Geometrie der Kavität dahingehend modifiziert, dass die am Bauteil verrundeten Elemente des axialen Strömungsgitters durch einen Polygonzug angenähert wurden, der eine bessere Anpassung der Tetraederelemente erlaubt. Dennoch ist die Elementdichte im Bereich des Axialgitters sehr hoch und die Zahl der Elemente entsprechend groß. Für das in Abbildung 2.2 angedeutete Gitter benötigt das Berechnungsprogramm FEMLAB 16463 Knoten und 52538 Elemente. Da es sich bei der berechneten Druckfunktion um ein skalares Feld handelt, entspricht die Zahl der Freiheitsgrade der Knotenzahl. Für die Tetraederelemente wurden lineare Ansatzfunktionen gewählt, die trotz der großen Elementzahl eine Eigenwertberechnung in wenigen Minuten ermöglichen. Nachteilig erweist sich bei dieser Kombination aus großer Elementzahl und einfachen linearen Ansätzen, dass die Druckfunktion teilweise keinen glatten Verlauf aufweist. Die Anwendung quadratischer Ansatzfunktionen übersteigt jedoch die Rechen- und Speicherleistung der verfügbaren Arbeitsplatzrechner und führt zu Programmabstürzen.

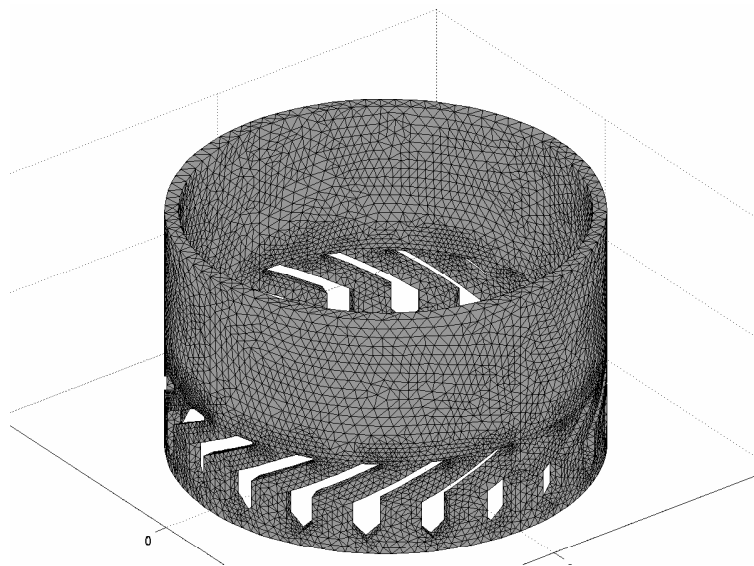


Abbildung 2.2: FE-Diskretisierung der Kavität

3 Berechnung der Labyrinthströmung

3.1 Einfluss der Labyrinthströmung auf das gekoppelte System

Aus der Schwingung der Strukturen resultieren periodische Änderungen der Strömung in der Labyrinthkammer und in den Dichtspalten. Diese Strömungsänderungen haben in zweifacher Hinsicht wesentliche Einflüsse auf das gekoppelte System:

- Die aus der Strömung resultierende Druckänderung in der Labyrinthkammer beaufschlagt die Oberflächen der Labyrinthkammer und führt zu periodischen Erregerkräften auf die Strukturen.
- Die Änderung der Strömungsgeschwindigkeit im Dichtspalt führt zu einer Schwingungsanregung der Fluidteilchen in der angrenzenden Kavität. Die Anregung des Druckfeldes in der Kavität erfolgt über die Schnelle der Fluidteilchen am Dichtspalt. Die Kavität als akustischer Resonator verstärkt diese Fluidschwingung.

Die Strömungsänderungen resultieren sowohl aus der Änderung der Spalthöhe infolge der Strukturschwingungen als auch aus der Druckschwingung in der Kavität als Randbedingung für die Strömung. Diese Interaktion zwischen dem Druckfeld und der Spaltströmung ist ein wesentlicher Kopplungsmechanismus für das System. Zur Berechnung der Spaltströmung sind die dynamischen Druckschwingungen in der Kavität zu der statischen Druckdifferenz zwischen Ein- und Ausstrom zu addieren. Liegt die Kavität hochdruckseitig, so erreicht der dynamische Druck in der Kavität sein Maximum bei minimaler Spalthöhe und erhöht damit den Einstromdruck am Spalt. Umgekehrt wird bei maximaler Spalthöhe der Druck im Einstrombereich des Spaltes durch die Druckschwingung vermindert, so dass die dynamischen Druckrandbedingung zu einer gleichmäßigeren Strömungsgeschwindigkeit beitragen. Bei niederdruckseitiger Kavität treten die dynamischen Druckschwingungen ausstromseitig auf. Daher wird bei minimaler Spalthöhe der stationäre Druck am Ausstrom um den Amplitudenwert der dynamischen Druckschwingung abgesenkt. Bei maximaler Spalthöhe wird der stationäre Druck am Ausstrom um den dynamischen Anteil erhöht. Somit wird die Differenz des Absolutdrucks zwischen Ein- und Ausstrom bei minimaler Spalthöhe dynamisch erhöht und bei maximaler Spalthöhe vermindert. Auch in diesem Fall resultiert aus den dynamischen Druckänderungen in der Kavität eine gleichmäßigere Strömungsgeschwindigkeit im Dichtspalt.

3.2 Numerische Strömungsberechnungen

Zur Durchführung statistisch stationärer Strömungsberechnungen muss vorausgesetzt werden, dass die Strömung im Spalt stets ohne zeitliche Verzögerung der Strukturbewegung folgen kann. Dies bedeutet, dass Trägheitskräfte im Fluid klein sind gegenüber den Kräften aus dem Druckpotential. Da die veränderliche Spaltströmung als Anregung für das modale Druckfeld betrachtet wird, würde aus der Trägheit der periodischen Fluidströmung eine gegenüber der Strukturschwingung verzögerte Anregung des Druckfeldes resultieren. Die gemessenen Phasenwinkel zwischen dem Druckfeld und den Strukturen weisen jedoch nicht auf ein Überspringen der Strömung gegenüber der Strukturschwingung hin. Es wird daher angenommen, dass die Strömung bei Systemfrequenzen zwischen 0.5 kHz und 1.2 kHz und bei Einstromdrücken von maximal 7 bar der Strukturbewegung ohne relevante Verzögerung folgen kann.

Die Strömungsberechnungen wurden mit einem einfachen zweidimensionalen Berechnungsprogramm durchgeführt, das auf dem Finite-Differenzen-Verfahren basiert. Das Programm ist Teil des Software-Paketes SEAL2D/3D zur Berechnung rotordynamischer Koeffizienten von Labyrinthdichtungen in rotierenden Maschinen [DIE88]. In der zweidimensionalen Berechnung werden die Startwerte für die anschließende Berechnung des dreidimensionalen Strömungsfeldes in der Labyrinthdichtung bestimmt. Das Programm eignet sich sowohl zur Berechnung inkompressibler wie auch kompressibler Strömungen. Beide Programmenteile verfügen über ein $k - \varepsilon$ -Modell zur Turbulenzmodellierung und über ein logarithmisches Wandgesetz zur Modellierung der Strömungsgrenzschicht. Die resultierenden Strömungen können daher als statistisch stationär bezeichnet werden, da die stationären Strömungsfeldgrößen aus einer Mittelung der instationären Turbulenz resultieren. Abbildung 3.1 zeigt ein typisches Geschwindigkeitsprofil im Labyrinth. Im Bereich der Strukturen sind die Geschwindigkeiten an den Knoten des rechtwinkligen Berechnungsnetzes zu Null gesetzt. Vergleichsrechnungen mit dem kommerziellen Programm ANSYS-CFX5 zeigen, dass die im Labyrinth berechneten Geschwindigkeiten und Drücke nahezu übereinstimmen. Zur Berechnung der Koeffizienten für das mathematische Modell der Druckmoden können daher beide Programme gleichermaßen verwendet werden. Vorteilhaft bei der Anwendung des 2D-Programmes ist die schnelle Anpassung der Berechnungsparameter und die kurze Rechenzeit bei Variantenrechnungen.

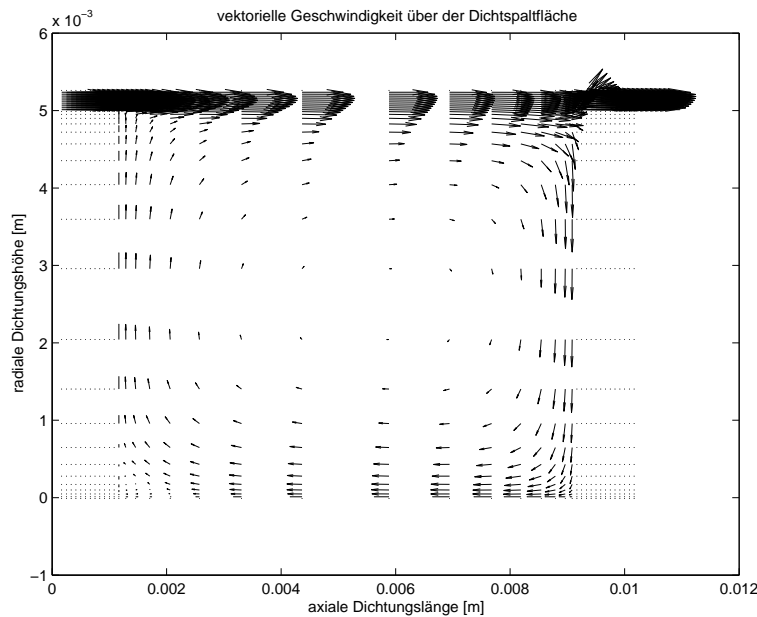


Abbildung 3.1: Vektorplot der Strömungsgeschwindigkeit im Labyrinth

3.3 Periodische Druckänderung im Labyrinth

Werden Strukturschwingungen in der Versuchsanlage bedämpft, so wird ein Strömungszustand im Labyrinth erreicht, der direkt mit den Ergebnissen der Strömungsberechnung verglichen werden kann. Da in der Labyrinthkammer nur ein Drucksensor an der Statoroberfläche vorhanden ist, kann mit den Berechnungsergebnissen die Frage geklärt werden, ob beide Strukturen durch die gleichen Druckkräfte beaufschlagt werden. Die Rechnungen zeigen, dass der Druck in der Labyrinthkammer, trotz der starken Strömungsänderung durch den Kammerwirbel, annähernd konstant bleibt. Abbildung 3.2 zeigt einen Plot der Druckverteilung über der Fläche der Labyrinthkammer aus einer 2D-Berechnung. Durch das Vorhandensein des modalen Druckfeldes ändern sich, je nach Position der Kavität, die Druckrandbedingungen der Labyrinthströmung auf der Hoch- oder Niederdruckseite. Die Druckschwingung erhöht und vermindert periodisch den Zu- oder Abstromdruck, so dass auch in der Labyrinthkammer eine periodische Druckänderung erfolgt. Diese Druckänderung wird durch die Druckschwingung in der Kavität hervorgerufen, sie ist selbst jedoch ausschließlich durch die resultierende Strömungsänderung im Labyrinth festgelegt. Es ist keine dynamische Amplitudenüberhöhung infolge von Fluidschwingungen in der Kammer erkennbar.

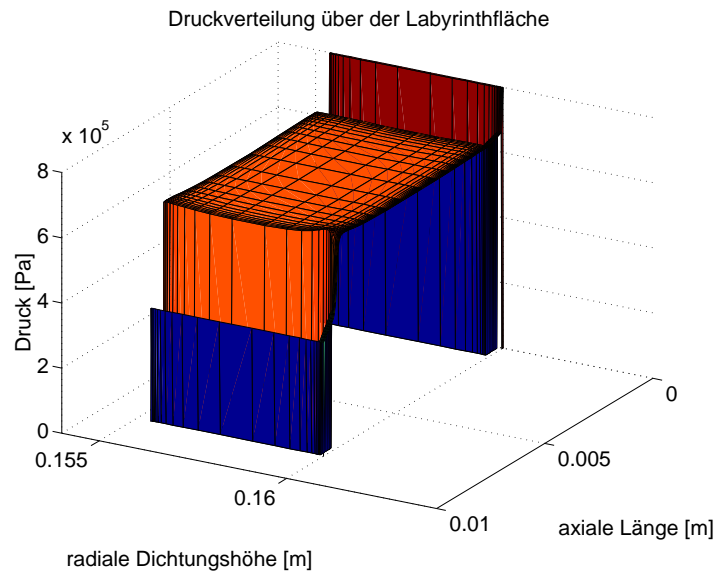


Abbildung 3.2: Druckverteilung über dem Labyrinthquerschnitt

Zur Berechnung der strömungsbedingten Druckänderungen in der Labyrinthkammer werden jeweils eine Strömungsberechnung bei maximaler und minimaler Spalthöhe durchgeführt. Die durch das modale Druckfeld verursachten Druckänderungen werden in den Druckrandbedingungen der Strömungsrechnung berücksichtigt. Die Ergebnisse dieser Berechnungen zeigen eine gute Übereinstimmung mit den gemessenen Drücken in der Labyrinthkammer. Bei einer Schwingung der Knotenzahl zwei mit hochdruckseitiger Kavität und einem Einstromdruck von 6.9 bar, reicht eine Druckdifferenz von 0.85 bar zwischen Ein- und Ausstrom aus, um in der Kavität eine Druckamplitude von 0.3 bar zu erzeugen. Die Summe beider Strukturamplituden beträgt ca. 0.13 mm bei einer Ruhespalthöhe von 0.15 mm. Die resultierende Druckamplitude im Labyrinth beträgt 0.205 bar bei einem gemessenen Wert von 0.223 bar. Ein ähnlich gutes Ergebnis wird bei der Berechnung mit den Daten einer Schwingung der Knotenzahl zwei bei niederdruckseitiger Kavität und 6.9 bar Einlassdruck erzielt. Hier werden 1.7 bar Druckdifferenz benötigt, um eine dynamische Druckamplitude von 0.265 bar in der Kavität zu erzielen. Die Summe der Strukturamplituden beträgt lediglich 0.055 mm. Daraus resultieren entsprechend kleine Druckänderungen in der Labyrinthkammer von lediglich 0.088 bar, die durch den berechneten Wert von 0.0825 bar wiederum leicht unterschätzt werden. Bei den Ergebnissen ist zu berücksichtigen, dass durch die Geometrierzeugung des Programmes SEAL2D stets die Strömungsberechnung durch Dichtspalte von gleicher Höhe erfolgt. Dadurch kann die Kinematik der Strukturschwingung nicht vollständig abgebildet werden. KISSEL [KIS97] bezeichnet den Effekt unterschiedlicher Spalthöhen infolge der Struktureigenform als dynamische Spaltweitenänderung und misst ihr einen beträchtlichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten bei. Da die Änderung der dynamischen Spalthöhe in den Strömungsberechnungen mit SEAL2D durch eine Parallelver-

schiebung der Struktur erreicht und die in der Schwingbewegung enthaltene Verkipfung des Labyrinths vernachlässigt wird, ist bei den Berechnungsergebnissen ein gewisser systematischer Fehler anzunehmen.

Die Ergebnisse der Druckberechnungen im Labyrinth sind in erster Linie wichtig als Bestätigung der Annahme, dass die Druckänderungen im Labyrinth keine Schwingungsvorgänge sind, sondern nur auf der Änderung des Strömungsfeldes infolge der Strukturschwingungen beruhen. Insbesondere die in der Literatur häufig vertretene Annahme, dass für die Umfangslänge des Labyrinths akustische Resonanzfrequenzen bestimmt werden können, die das gesamte Schwingungsverhalten maßgeblich beeinflussen, kann durch die Messung und Berechnung der Drücke im Labyrinth entkräftet werden. Die gemessene Systemfrequenz von 685 Hz bei der Knotenzahl zwei mit niederdruckseitiger Kavität ist nahezu identisch mit der nach ABBOTT [ABB81] berechneten akustischen Resonanzfrequenz. Dennoch werden in der Labyrinthkammer mit 0.088 bar tendenziell kleine Druckamplituden gemessen, die mit den Ergebnissen aus Strömungsrechnungen gut übereinstimmen und offenbar keine dynamische Überhöhung aufweisen. Die Betrachtung der Druckänderungen im Labyrinth als strömungsbedingte Fluid-Erregerkraft erweist sich daher als gerechtfertigt und ist für die Simulation des Schwingungsverhaltens von großer Bedeutung. In einer rein modellbasierten Analyse der Schwingungen können somit die Fluid-Erregerkräfte auf die Strukturen durch geeignete Strömungsberechnungen bestimmt werden.

3.4 Periodische Strömungsänderungen im Dichtspalt

Die Strömungsgeschwindigkeit im Dichtspalt variiert bei konstantem Druckverhältnis mit der Spalthöhe, ist also von der Amplitude der Strukturschwingung abhängig. Entspricht die Summe der Schwingungsamplituden beider Strukturen gerade dem Ruhespaltspiel, so führt die Schwingung zum Anstreifen der Dichtung und im Kontaktpunkt ist die Strömungsgeschwindigkeit Null. An der Position mit maximalem Spaltspiel wird eine Strömungsgeschwindigkeit erreicht, die oberhalb der Geschwindigkeit bei Ruhespalthöhe liegt. Die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen maximaler und minimaler Spalthöhe nehmen bei Verminderung der Ruhespalthöhe zu. Damit nimmt auch die Anregung der Druckschwingungen in der Kavität zu und führt zu der bekannten Beobachtung, dass Dichtungen mit kleinen Spalthöhen verstärkt zu instabilem Verhalten neigen [ABB81], [EHR68], [LEW78]. Die Ursache für die starke Reduzierung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit bei kleinen Spalthöhen sind im Auftreten von Ablösewirbeln an den Kanten der Dichtstreifen und Randschichteffekten zu suchen. Diese haben mit kleiner werdender Spalthöhe einen zunehmenden relativen Anteil an der durchströmten Fläche und reduzieren die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in den Randbereichen des Spaltes. Dies führt bei sehr kleinen Spalthöhen zu insgesamt stark verminderten Strömungsgeschwindigkeiten. Ab einem gewissen Strömungsquerschnitt nimmt der Einfluss von Ablösewirbeln und Randschichteffekten auf die Strömungsgeschwindigkeit ab. Der Zusammenhang zwischen Spalthöhe und Strömungsgeschwindigkeit ist in Abbil-

dung 3.3 dargestellt. Es handelt sich dabei um berechnete Werte für den einstromseitigen Spalt bei hochdruckseitiger Kavität und einem Einlassdruck von 7 *bar* sowie einem Druckverhältnis von ca. 0.9.

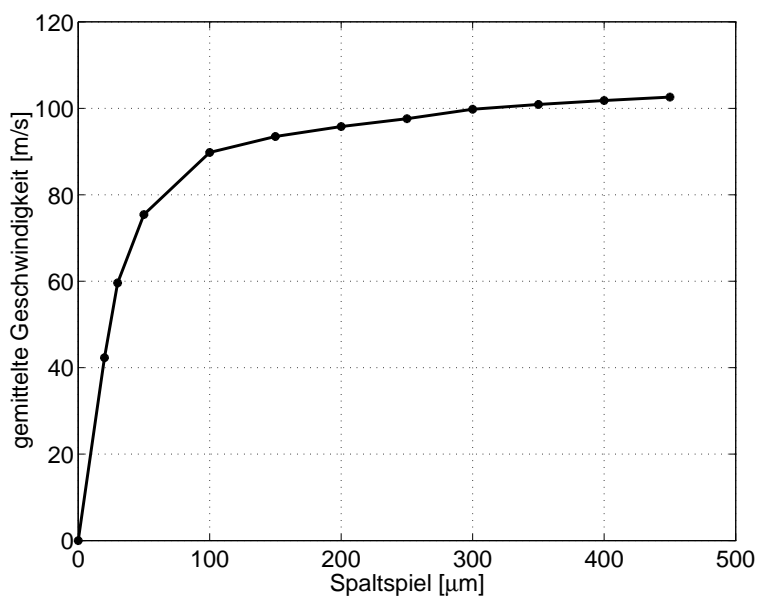


Abbildung 3.3: Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit von der Spalthöhe

Das Geschwindigkeitsdiagramm zeigt bis ca. 0.07 *mm* Spalthöhe einen Bereich, in dem die Strömungsgeschwindigkeit sehr stark von der Spalthöhe abhängig ist. Oberhalb von 0.1 *mm* Spalthöhe ist die Abhängigkeit deutlich geringer. Für Spalthöhen, die das hier betrachtete Maß überschreiten, wird die Strömungsgeschwindigkeit nur noch vom Druckverhältnis abhängig sein. Wegen der Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit im Spalt von Ablösewirbeln und Randschichteffekten haben die im Berechnungsprogramm implementierten Wand- und Turbulenzmodelle einen erheblichen Einfluss auf den berechneten Geschwindigkeitsverlauf. Bei den Ergebnissen der Strömungsberechnung können daher eventuell systematische Fehler auftreten. Dennoch führen die berechneten Geschwindigkeiten der Spaltströmung zu guten Ergebnissen bei der Modellierung des modalen Druckfeldes.

4 Experimentelle Untersuchungen

4.1 Vorbemerkungen zum experimentellen Teil

Diese Arbeit basiert auf experimentellen Untersuchungen an einem Prüfstand, der zuvor an der Universität Kaiserslautern im Rahmen eines Forschungsprojektes der Europäischen Union (BRITE-EURAM) konstruiert, aufgebaut und betrieben wurde [KIS97]. In einem nachfolgenden Forschungsprojekt, das maßgeblich von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziert wurde, konnte der Prüfstand an der TU-Darmstadt wieder in Betrieb genommen werden. Die Zielsetzung dieses Forschungsvorhabens war die Analyse der Strömungs-Struktur-Wechselwirkung innerhalb der Labyrinthkammer. Erste Messungen im Rahmen des Forschungsprojektes zeigten bereits, dass die maximalen Druckamplituden nicht in der Labyrinthkammer, sondern in der Kavität außerhalb der Labyrinthkammer auftreten. Gemessen wurden die unerwartet hohen Amplituden zunächst nur an einem Messpunkt, der in einem Abstand von ca. 5 mm vom Dichtspalt positioniert ist. Die Messergebnisse stehen damit im Widerspruch zu einer häufigen Annahme in der Literatur, nach der die Druck- und Strömungsbedingungen im Ein- und Ausstrombereich der Dichtungen vereinfachend als konstant angenommen werden können (vgl. Abschnitt 1.2). Es handelt sich hierbei offensichtlich um eine Annahme, durch die der Mess- und Modellierungsaufwand in realisierbaren Grenzen gehalten werden soll.

Die Feststellung, dass am zunächst einzigen vorhandenen Druckmesspunkt in der Kavität die reproduzierbar größten Druckamplituden gemessen werden, führt zu einer genaueren Untersuchung der Druckausbreitung vom Dichtspalt weg, in die Kavität hinein. Dazu wurde die Druckmessung in der Kavität um mehrere Messpunkte erweitert. Die mit dieser Sensoranordnung durchgeführten Messungen zeigen, dass in Abhängigkeit von verschiedenen Versuchsparametern stets große Druckamplituden in der gesamten Kavität gemessen werden. Damit ist offensichtlich, dass in der Kavität, im Vergleich zur Labyrinthkammer, wesentlich größere Strukturoberflächen durch deutlich größere Druckamplituden dynamisch belastet werden und der Einfluss dieser flächig ausgedehnten Druckfelder auf das gekoppelte schwingungsfähige System nicht vernachlässigt werden darf.

4.2 Eigenschaften des Prüfstandes

Im Rahmen des experimentellen Teiles eines Forschungsprojektes der Deutschen Forschungsgemeinschaft wurde ein bereits existierender Prüfstand an der TU Darmstadt aufgebaut und wieder in Betrieb genommen. Konstruktiv weist dieser Labyrinthdichtungs-Prüfstand eine Reihe von Vereinfachungen gegenüber Labyrinthdichtungen in realen Maschinen auf. Der Aufbau des Prüfstandes ist in der Prinzipskizze 4.1 dargestellt. Die wichtigste Vereinfachung besteht in der Befestigung beider Dichtungsstrukturen im Gehäuse. Sowohl die als Stator bezeichnete äußere Struktur wie auch die als Rotor bezeichnete innere Struktur sind fest mit dem Gehäuse des Prüfstandes verschraubt und können keine Relativbewegung zueinander ausführen. Die Verschraubungsflächen der Flansche beider Strukturen befinden sich an der gleichen axialen Position im Gehäuse. Der weiterhin als Schaft der Dichtungen bezeichnete zylindrische Teil ist von konstanter Wandstärke und für Stator und Rotor gleich lang. Die Wandstärke der Strukturen ist die einzige veränderbare geometrische Größe, um die Eigenfrequenzen der Dichtungen zu beeinflussen. Da die Eigenfrequenzen rohrförmiger Strukturen wesentlich stärker durch den Außendurchmesser, als durch die Wanddicke beeinflusst werden, variiert die Dicke der Strukturen in einem weiten Bereich zwischen 1.4 mm und 10 mm [ALZ02]. Der Innendurchmesser des Stators beträgt 320 mm und die mittlere Umfangslänge der Labyrinthkammer ca. 990 mm . Die axiale Länge beider Strukturen beträgt 135.5 mm . Der Rotor trägt am freien Schaftende, gegenüber dem Befestigungsflansch, ein einfaches Ein-Kammer-Durchblicklabyrinth, das durch zwei umlaufende Dichtstreifen gebildet wird. Die Breite der Dichtstreifen beträgt an der Spitze 0.6 mm , der axiale Abstand der Streifen beträgt 7 mm und ihre Höhe 5 mm für alle Strukturvarianten. Die Dichtungen sind, wie der gesamte Prüfstand, aus Stahl gefertigt. Das Arbeitsmedium für die Versuche ist Druckluft mit variablen Ein- und Auslassdrücken. Die Drallringe im Zu- und Abstrombereich der Dichtungen stellen axiale Strömungsgitter mit 0° und 60° Drallwinkel dar. Ihre ursprüngliche Funktion ist wegen der geringen Strömungsgeschwindigkeit außerhalb der Dichtspalte vernachlässigbar gering. Durch die schraubenförmig gedrehten Gitterelemente kann für den Ring mit 60° Drall jedoch eine Vergrößerung der akustisch wirksamen Länge bei gleicher Bauteillänge festgestellt werden. Die dadurch größere axiale Wellenlänge der Druckfelder führt zu einer Verminderung der Systemfrequenzen um ca. 20 Hz bei sonst vergleichbaren Versuchsparametern. In dieser Arbeit werden nur Versuche mit den 60° -Drallringen beschrieben, da für diese Geometrie durchweg geringere Streuungen bei den Messdaten festgestellt wurden.

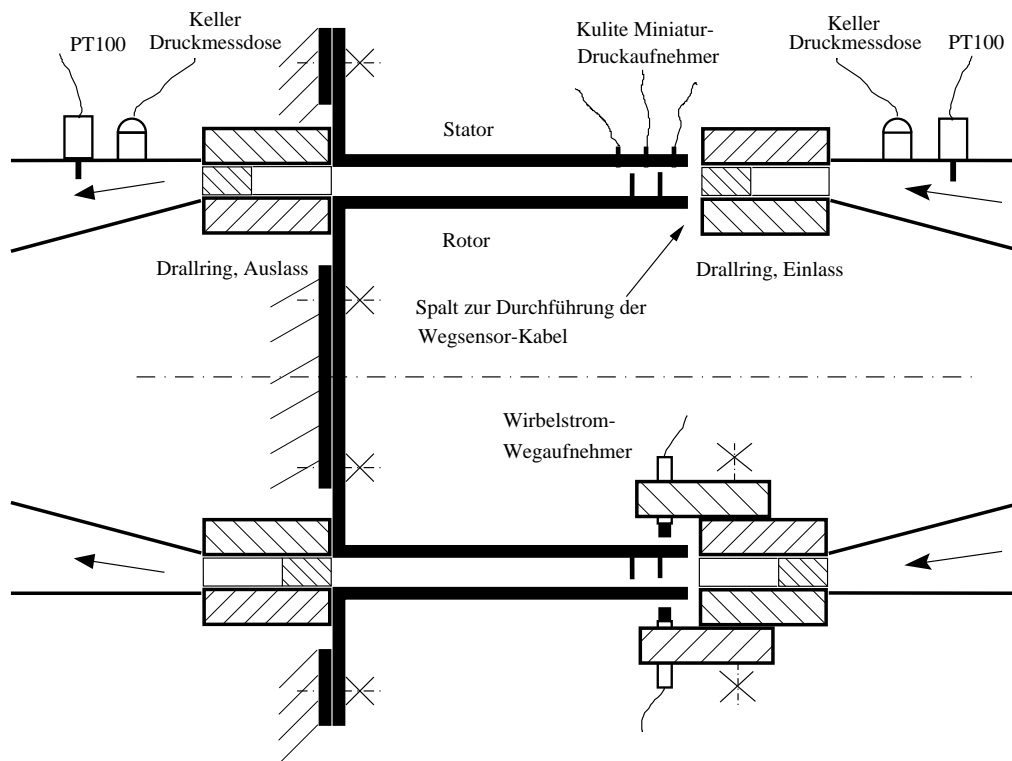


Abbildung 4.1: Prinzipskizze des Prüfstandes

In Tabelle 4.1 sind die modalen Eigenfrequenzen und Strukturdämpfungen aller Strukturvarianten aufgelistet, mit denen Messungen durchgeführt wurden. Die Zahl in der Strukturbezeichnung kennzeichnet die Wanddicke der Strukturen in 0.1 mm . Für die später folgende Modellierung des gekoppelten dynamischen Systems eignen sich jedoch nicht alle möglichen Strukturkombinationen. Die Kriterien, nach denen die Auswahl geeigneter Messungen für die Simulation der gekoppelten Schwingungen erfolgt, werden an den entsprechenden Stellen erläutert. Ferner treten in den Messungen nur wenige unterschiedliche Moden des gekoppelten Systems auf. Die dominanten Grundschrwingungen mit den größten Amplituden sind stets der zweite und dritte Mode. Als Oberschwingungen werden mit kleineren Amplituden teilweise der vierte und fünfte Mode gemessen. Da die Vorverstärkung der Messwerterfassung durch eine Auto-Range-Funktion an das Signal der dominanten Grundschrwingung angepasst wird, ist die Auflösung der höherfrequenten Moden teilweise vermindert.

	ROTOR100		ROTOR80		ROTOR14		STATOR88		STATOR50	
Eigenform	f [Hz]	d [%]	f [Hz]	d [%]	f [Hz]	d [%]	f [Hz]	d [%]	f [Hz]	d [%]
1	1331	1.54	1332	1.2	706	0.80	3712	1.55	2106	2.00
2	800	0.82	662	0.55	335	0.62	1292	1.12	1289	1.22
3	1128	0.88	889	0.21	285	0.25	1096	1.18	970	0.38
4	1911	0.46	1520	0.66	449	0.12	1536	0.25	1029	0.13
5	2893	0.05	2320	0.06	688	0.13	2155	0.16	1329	0.1
6	4075	0.01	3280	0.08	962	0.06	2979	0.13	1794	0.17
7	5448	0.08	4397	0.02	1233	0.05	3941	0.05	2358	0.09
8					1461	0.03	5068	0.06	3032	0.09
9					1666	0.04			3793	0.12
10					1896	0.02			4618	0.08

Tabelle 4.1: Gemessene Eigenfrequenzen im eingespannten Zustand (nach KISSEL)

Bild 4.2 zeigt einen axialen Schnitt durch den Prüfstand. Zu beiden Seiten des Gehäuses sind voluminöse Absorptionsschalldämpfer montiert, die sowohl die Schallemission des Prüfstandes reduzieren wie auch eine Isolierung der Strukturen gegenüber akustischen Anregungen aus den Rohrleitungen (Kugelhähne u.ä.) gewährleisten sollen. Die Druckluftzufuhr erfolgt gemäß der Pfeilrichtung von links nach rechts. Nach dem Eintritt in das Gehäuse durchströmt die Luft zunächst das bereits erwähnte axiale Strömungsgitter. Danach gelangt die Luft in den zylindrischen Hohlraum zwischen den beiden Dichtungsstrukturen, ehe sie durch den einstromseitigen Dichtspalt in das eigentliche Labyrinth strömt. Der gesamte Bereich zwischen dem Absorptionsschalldämpfer und dem ersten Dichtspalt wird als Kavität bezeichnet und wirkt als Resonanzraum für die modalen Druckfelder. Auf den ersten Dichtspalt folgt die eigentliche Labyrinthkammer und der ausstromseitige Dichtspalt. Ausstromseitig folgen ein weiteres Drallgitter, das die gleiche Geometrie wie das einstromseitige Gitter aufweist sowie ein weiterer Schalldämpfer. Bei der als Reibungsdämpfer bezeichneten Vorrichtung am Statorflansch handelt es sich um zwei axial wirkende Kugellager, die optional montiert werden können. Im montierten Zustand bewirkt die Reibung zwischen den Wälzkörpern und Lagerringen eine weitgehende Unterdrückung der Strukturschwingung. Diese zusätzliche Dämpfung ermöglichte es, den Leakage-Massenstrom und stationäre Drücke im Labyrinth zu messen. Zur Durchführung der eigentlichen Schwingungsmessungen ist der Reibungsdämpfer stets demontiert. Das gesamte Gehäuse kann zwischen den Schalldämpfern gewendet und von beiden Seiten durchströmt werden, um Messungen mit hoch- und niederdruckseitiger Kavität zu ermöglichen.

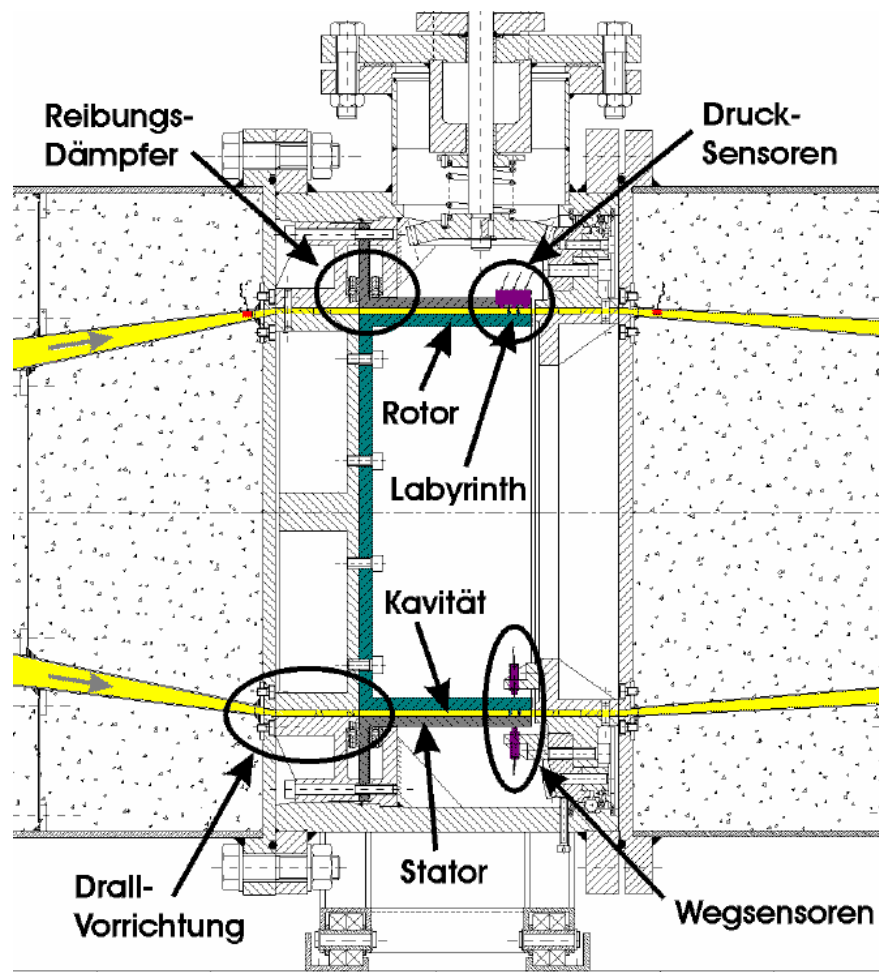


Abbildung 4.2: Schnitt durch das Gehäuse des Prüfstandes (nach KISSEL)

Zur Versorgung des Prüfstandes mit Druckluft konnte eine vom Fachgebiet Strömungslehre und Aerodynamik der TU Darmstadt zur Verfügung gestellt Luftlieferanlage samt zugehöriger Infrastruktur genutzt werden. Die Druckluft wurde in zwei Stufen auf den Betriebsdruck des Prüfstandes entspannt. Im ersten Schritt erfolgte eine Reduzierung von ca. 25 *bar* Behälterdruck auf 12 *bar* Vordruck in der Zuleitung zur Anlage. Im zweiten Schritt wurde mit einem rein mechanischen Druckregelventil unmittelbar vor dem einstromseitigen Schalldämpfer der Anlage der gewünschte Druck im Zustrombereich der Dichtung eingestellt. Der Einstromdruck variiert als Versuchsparameter für die Messungen zwischen 3 *bar* und 8 *bar*. Die Messungen wurden überwiegend mit der Abstufung 3 *bar*, 5 *bar* und 7 *bar* Zustromdruck durchgeführt. Der Gegendruck und damit die Druckdifferenz zwischen Ein- und Ausstromseite als weiterer wichtiger Versuchsparameter wurde mittels eines nach dem Ausstromschalldämpfer montierten und manuell betätigten Kugelhahnes eingestellt.

4.3 Sensorik und Messwerterfassung

Die am Prüfstand montierte Sensorik zur Wegmessung besteht aus maximal vier Wirbelstromsensoren der Firma BENTLY-NEVADA. Gemessen werden Wegamplitude und Schwingfrequenz am freien Strukturrand. Die Montage der Sensoren erfolgt an einem Ring, der durch ein Vierpunkt-Kugellager drehbar im Gehäuse gelagert ist und über ein Handrad mittels Kegelradgetriebe gegenüber den drehfest montierten Dichtungsstrukturen in beliebige Winkelposition einjustiert werden kann. Die Genauigkeit dieser Sensorpositionierung liegt wegen der Teilung des Kegelgetriebes und möglicher Ablesefehler bei maximal 2° . Wie in 4.2 ersichtlich, sind je zwei Wegsensoren radial von innen am Rotor und von außen am Stator montiert. Der Montagewinkel zwischen zwei Wegsensoren beträgt stets 36° .

Die ursprüngliche, in Bild 4.2 dargestellte Anordnung der Drucksensoren beschränkt sich auf mehrere Positionen am Umfang der Labyrinthkammer und je einen Sensor vor und nach den beiden Dichtspalten. Es werden Miniatur-Drucksensoren der Firma KULITE verwendet, die nach dem piezoresistiven Messprinzip arbeiteten und somit auch zur Messung statischer Drücke geeignet sind. Dieser Sensortyp hat einen Durchmesser von lediglich 2.3 mm . Zur Montage der Sensoren werden zunächst an den vorgesehenen Positionen Durchgangsbohrungen von 2.5 mm im Stator angebracht und coaxial mit einer zylindrischen Senkung von ca. 8 mm Durchmesser versehen. In diese Senkungen werden Kunststoffhülsen mit einem M5-Innengewinde eingeklebt. Die Drucksensoren wiederum werden in axial durchbohrte M5-Kunststoffschrauben eingeklebt, so dass durch geeignete Einschraubtiefe die Oberfläche des Sensors fluchtend bezüglich der Statorinnenfläche positioniert werden kann. Die verwendete Messwerterfassung erlaubt durch entsprechende Filter (Trennung in den Gleich- und Wechselanteil des Signals) sowohl die Messung statischer als auch dynamischer Absolutdrücke. Dadurch kann für jede Messung die Bestimmung der exakten Betriebsbedingungen, also der statischen Drücke vor, in und nach der Labyrinthkammer, durchgeführt sowie die dynamische Druckamplitude und Frequenz der Druckschwingung am gleichen Sensor bestimmt werden.

Die Messwerterfassung erfolgt über ein Frontend (SCADAS II) der Firma DIFA mit zwölf Kanälen, das für jeden Kanal über eine Signalverstärkung, Hoch- und Tiefpassfilter sowie einen 12-Bit A/D-Wandler verfügt. Die zugehörige Software und Bedienoberfläche der Firma LMS sind auf einer Workstation installiert, welche die digitalisierten Zeitdaten direkt mittels eines schnellen FOURIER-Algorithmus in den Frequenzbereich transformiert und alle gebräuchlichen Funktionen zur weiteren Signalverarbeitung bereit stellt. Zur Auswertung der Messungen wurden Autopower-Spektren und Crosspower-Spektren (Kreuzleistungsdichte-Spektren) genutzt. Als Fensterfunktion wurde eine Flattop-Funktion gewählt, die für amplitudengenaue Messungen von diskreten Frequenzen, wie sie bei den gekoppelten modalen Schwingungen von Druckfeld und Strukturen auftreten, gut geeignet ist.

Autopower-Spektren werden für jeden Frequenzpunkt als Skalarprodukt aus dem komplexen Frequenzspektrum mit seinen konjugiert komplexen Zahlenwerten berechnet. Das

Ergebnis ist somit eine reelle Zahl, die dem Quadrat des Amplitudenwertes für jede Frequenz entspricht. Crosspower-Spektren enthalten zusätzlich eine Winkelinformation, da sie aus dem Vektorprodukt des konjugiert komplexen Frequenzspektrums eines Referenzsignals mit dem Frequenzspektrum eines Vergleichssignals berechnet werden. Als Referenzsensor wurde für alle Messungen ein Wegsensor am Rotor verwendet. Aus Crosspower-Spektren resultiert für jeden Sensor ein Phasenwinkel bezüglich des Referenzsignals. Mittels dieser Phaseninformation und der Kenntnis des Geometriewinkels zwischen Referenz- und Vergleichssensor ist es möglich, die Ordnung der gemessenen Schwingungseigenformen und die Phasenwinkel zwischen den Schwingungen der drei Systemkomponenten Rotor, Stator und modales Druckfeld in der Kavität zu bestimmen.

Eine mögliche Fehlerquelle der Messwerterfassung resultiert aus der gewählten Frequenzauflösung. Da die dominanten Schwingungsmoden des gekoppelten Systems unterhalb 1.5 kHz auftreten, wäre eine obere Frequenzgrenze von 1.5 kHz bis 2 kHz für nahezu alle Messungen ausreichend gewesen. Zum Zeitpunkt der Messungen war jedoch nicht sicher, ob evtl. Oberschwingungen oder generell Schwingungen mit hoher Frequenz für das Verständnis der Kopplung und Schwingungsanfachung wichtig sind. Daher wurde bei den Messungen eine obere Frequenzgrenze von mindestens 3 kHz gewählt. Für diese Maximalfrequenz resultieren aus 2048 diskreten Zeitmesspunkten des FFT-Algorithmus die halbe Anzahl, also 1024 Frequenzpunkte im Spektrum. Für die geforderte Maximalfrequenz folgt daraus eine Frequenzauflösung von ca. 3 Hz [LMS93]. Da die gemessenen modalen Schwingungen des gekoppelten Systems stets bei diskreten Frequenzen auftreten, kann die Systemfrequenz zwischen zwei Spektrallinien liegen, was zu einer Unterschätzung der tatsächlichen Amplitude führt.

4.4 Erweiterte Sensoranordnung

Die Untersuchung der Druckfelder in der Kavität erfolgt mit einer erweiterten Anordnung der Drucksensoren. Zusätzlich zu der bestehenden Sensorposition in der Kavität wurden entsprechend Bild 4.3 drei weitere Sensoren in der Kavität angebracht. Die Drucksensoren in der Kavität sind somit auf drei axiale Positionen verteilt. Der axiale Abstand zum Dichtspalt beträgt beim ersten Sensor 5 mm. Zwei weitere Sensoren sind in einer Ebene mit einem axialen Abstand von 55 mm angebracht und der vierte Sensor hat einen Abstand von 100 mm zum Dichtspalt. Durch die Winkelpositionen der Sensoren kann mittels der gemessenen Phasenwinkel bezüglich des Referenzsensors die Schwingungsordnung der modalen Druckfelder bestimmt werden. Die axiale Druckeigenform kann aus der Amplitudenmessung der Sensoren an den drei axialen Positionen bestimmt werden. Im Bild sind der Rotor samt Dichtstreifen sowie die an den entsprechenden Positionen im Stator angebrachten Drucksensoren dargestellt. Weitere mögliche Positionen für Drucksensoren im Labyrinth sind durch kleinere Markierungen angedeutet. Die beiden Wegsensoren zur Messung der Rotorschwingungen sind an der unteren Strukturtherhälfte angedeutet. Für Schwingungsmessungen am Stator sind gegenüberliegend, an

den gleichen Winkelpositionen, ebenfalls zwei Montagepositionen für Wegsensoren vorgesehen.

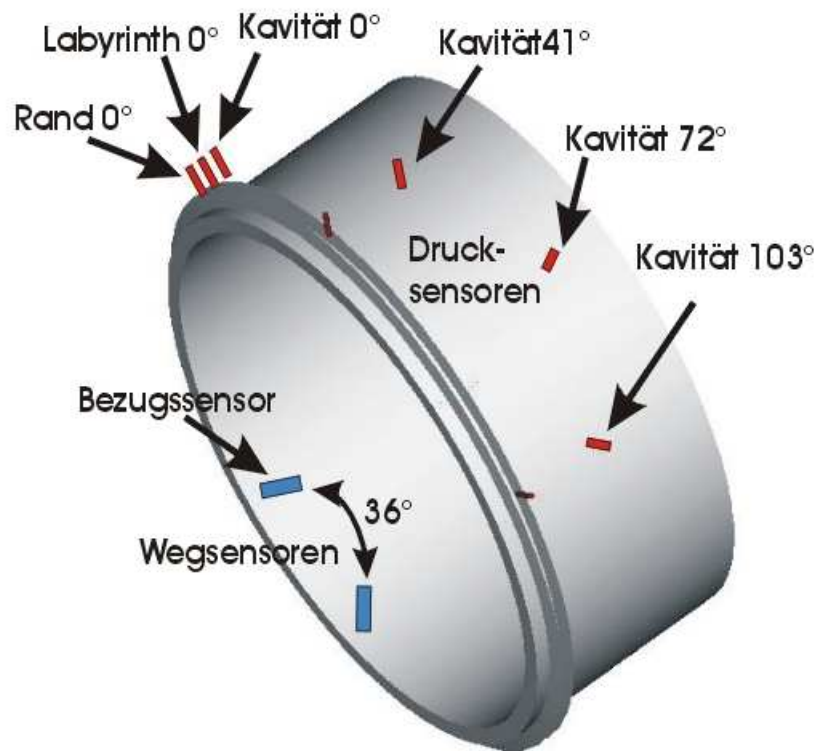


Abbildung 4.3: Erweiterung der Sensorik

Wegen der Limitierung der Messwerterfassung auf insgesamt zwölf Kanäle, können nicht alle vorhandenen Messpunkte mit Sensoren bestückt werden. Neben den drei zusätzlichen Sensorpositionen in der Kavität sind drei bereits vorhandene Druckmesspunkte vor, in und nach dem Labyrinth stets mit Drucksensoren versehen. Die drei an der 0°-Position montierten Drucksensoren werden sowohl für die Messung der statischen Drücke im Fluid als auch für die Erfassung dynamischer Amplituden und Phasen genutzt. Von den zwölf verfügbaren Kanälen sind somit sechs zur Messung dynamischer Drücke und drei zur Messung statischer Drücke belegt. Die verbleibenden drei Kanäle stehen für die Messung der Strukturschwingungen zur Verfügung. Zwei Wegsensoren befinden sich an den beiden in Bild 4.3 dargestellten Positionen am Rotor, der dritte Wegsensor ist gegenüber dem Bezugssensor am Stator positioniert.

4.5 Überlagerung von Druck- und Strukturschwingungen zu umlaufenden Wellen

Aus dem konstruktiven Aufbau des Prüfstandes geht hervor, dass es sich sowohl bei den Strukturen als auch bei der dazwischen liegenden Kavität um rotationssymmetrische Geometrien handelt, deren Schwingungen räumlich ausgedehnte Felder sind. Ist die axiale Länge des Feldes viel größer als die Wellenlänge, so ist die Schwingungsform in hinreichend großem Abstand zu den Rändern des Objektes nahezu ideal sinusförmig. An den Rändern ist die axiale Schwingungsform abhängig von den jeweiligen Rand- oder Einspannbedingungen. Die Ordnung der Schwingungen muss sowohl nach der axialen wie auch der Umfangsrichtung klassifiziert werden. Im allgemeinen Fall kann also eine beliebige Kombination von Sinuswellen am Umfang und in Längsrichtung auftreten. Wegen der geringen axialen Länge der Dichtungsstrukturen und der Kavität relativ zur Umfangslänge genügt jedoch die Anzahl der Sinuswellen am Umfang zur Bezeichnung der Schwingungsordnung. In der Literatur wird die Schwingungsordnung rotationssymmetrischer Strukturen als Knotenzahl bezeichnet. Die Knotenzahl bezeichnet die Anzahl diametraler Linien, die gegenüberliegende Knotenpunkte der Schwingung verbinden. In Bild 4.4 ist die zweifach auftretende Schwingung mit der Knotenzahl zwei am Beispiel des Rotors abgebildet. Beiden Eigenformen haben die gleiche Eigenfrequenz. Lediglich die Positionen der Schwingungsknoten und -bäuche sind vertauscht. Die beiden Eigenformen weisen einen räumlichen Phasenwinkel von $\pi/2$ auf. Sie verhalten sich zueinander wie Sinus- und Cosinusfunktionen und werden daher als orthogonale Moden bezeichnet.

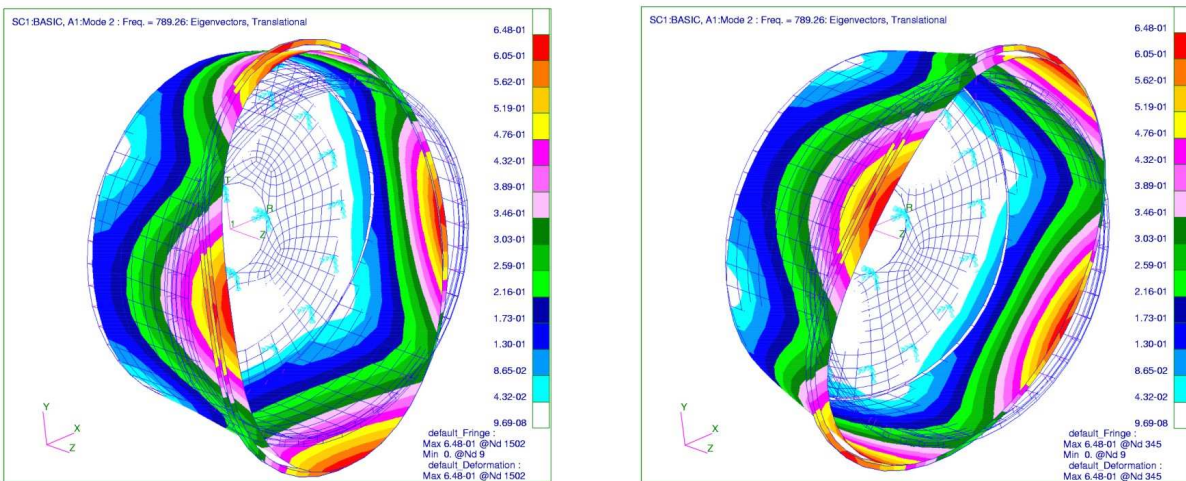


Abbildung 4.4: Orthogonale Moden der Strukturschwingung zweiter Ordnung

Überlagern sich die Schwingungen zweier orthogonalen Moden zudem mit einem zeitlichen Phasenwinkel von $\pi/2$ und sind die Amplituden beider Schwingungen identisch,

so kann man durch eine einfache Rechnung zeigen, dass die resultierende Schwingung die Form einer umlaufenden Welle hat. Die Überlagerung wird für die translatorische Koordinate x beschrieben, sie gilt jedoch ebenso für eine rotatorische Wellenbewegung, da der Kreisumfang stets der Wellenlänge oder einem Vielfachen entspricht. Für den Fall, dass die Amplitude beider Schwingungen mit dem gleichen Wert \hat{w} vorausgesetzt wird und sowohl die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ als auch die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ für beide Schwingungen gleich ist, kann die Überlagerung der beiden Schwingungen mit den Phasenwinkeln ϕ und θ wie folgt geschrieben werden:

$$w(x, t) = \hat{w} \sin(\omega t) \sin(kx) + \hat{w} \sin(\omega t + \phi) \sin(kx + \theta) \quad (4.1)$$

Mit dem Additionstheorem $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$ folgt:

$$w(x, t) = \frac{\hat{w}}{2} [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t + \theta - \phi) - \cos(kx + \omega t + \theta + \phi)] \quad (4.2)$$

Ersetzt man in dieser Gleichung die Phasenwinkel von Wellenzahl und Kreisfrequenz durch den Wert $\pi/2$, so wechselt das Vorzeichen des letzten Summanden in der Klammer und es folgt:

$$w(x, t) = \hat{w} \cos(kx - \omega t) \quad (4.3)$$

Dies ist die Gleichung einer wandernden bzw. umlaufenden Welle. Das Ergebnis erhält man für positive und negative Werte von $\varphi = \pm\pi/2$ und $\theta = \pm\pi/2$. Dies bedeutet, dass die Welle in beliebiger Richtung umlaufen kann, was in den Versuchen auch beobachtet wird. Da diese Überlagerung modaler Schwingungen für die Identifikation der Druck- und Strukturmoden sowie die Beurteilung der Messfehler von großer Bedeutung ist, sollen hier nochmals die Bedingungen für eine ideale Überlagerung modaler Schwingungen zu einer umlaufenden Welle aufgelistet werden:

- Beide Schwingungen müssen gleiche Amplituden haben.
- Der Phasenwinkel der Wellenzahl θ muss $\pi/2$ betragen.
- Der Phasenwinkel der Kreisfrequenz ϕ muss $\pi/2$ betragen.

Sind diese Anforderungen erfüllt, so führt die Überlagerung der Schwingungen zu umlaufenden Wellen, die eine sehr gute Identifikation der Schwingungsformen sowohl bei den Strukturen wie auch beim modalen Druckfeld erlauben. Um die vier Variablen der Schwingungsüberlagerung, also die beiden Amplituden der überlagerten Schwingungen und die beiden Phasenwinkel bezüglich Wellenzahl und Kreisfrequenz, exakt bestimmen zu können, wären sowohl an den Strukturen wie auch in der Kavität vier Sensoren in jeweils einer achsnormalen Ebene notwendig. Wegen der Limitierung der Gesamtzahl der Messkanäle und der zugehörigen Sensorik musste auf diese ideale Sensorausstattung zur Identifikation der Schwingungsformen verzichtet werden. Daher kann nur derjenige

Teil der Messungen als Grundlage für eine Modellierung und Simulation der gekoppelten Schwingungen herangezogen werden, in dem die Sensorpositionen und damit die Schwingungsordnung eindeutig identifiziert werden können und die Amplituden der beiden Messwerte an gleicher axialer Position übereinstimmen. Die Abweichungen der beiden Amplitudenwerte untereinander und die Winkelabweichung von den idealen Werten liegen bei Messungen mit genauer Schwingungsüberlagerung gemäß der oben genannten Kriterien oft deutlich unter 5 %.

4.6 Identifikation und Auswahl der Messungen

Messungen mit genauer Schwingungsüberlagerung weisen überwiegend auch eine gute Reproduzierbarkeit auf. Dies bedeutet, dass in einer Messreihe mit zumeist drei bis fünf Einzelmessungen bei leicht veränderten Druckrandbedingungen die Identifizierbarkeit der auftretenden Schwingungsformen in sämtlichen Einzelmessungen gleich gut ist. Die in Bild 4.3 dargestellten Winkelpositionen finden sich in den gemessenen Phasenwinkeln als Produkt aus der Knotenzahl und dem Geometriewinkel der Sensoranordnung wieder. Tritt beispielsweise die in der Skizze 4.5 dargestellte Strukturschwingung vierter Ordnung auf, so resultiert aus dem Geometriewinkel von 36° zwischen den beiden Wegsensoren am Rotor ein idealer Phasenwinkel von $\pm 144^\circ$ (je nach Umlaufrichtung der Welle) zwischen den gemessenen Signalen. Das gleiche Verfahren kann bezüglich der beiden Drucksensoren in der mittleren axialen Position der Kavität angewandt werden. Da zwischen den Drucksensoren größere Winkelabstände liegen und die dort gemessenen Phasenwinkel stets auf den Referenz-Wegsensor bezogen sind, übersteigen die gemessenen Phasenwinkel teilweise den Wert π bzw. 180° . Winkel dieser Größe führen bei der Anwendung eines Vier-Quadranten-Arcustangens zu Vorzeichensprüngen bzw. zur Berechnung der Komplementärwinkel bezüglich der Grenzwinkel von $\pm 180^\circ$. Durch den Bezug sämtlicher Signale auf das Referenzsignal der Rotorschwingung kann die Phase zwischen Druckfeld und Strukturschwingung einfach bestimmt werden, was für die Unterscheidung zwischen HD- und ND-Druckfeldern von Bedeutung ist.

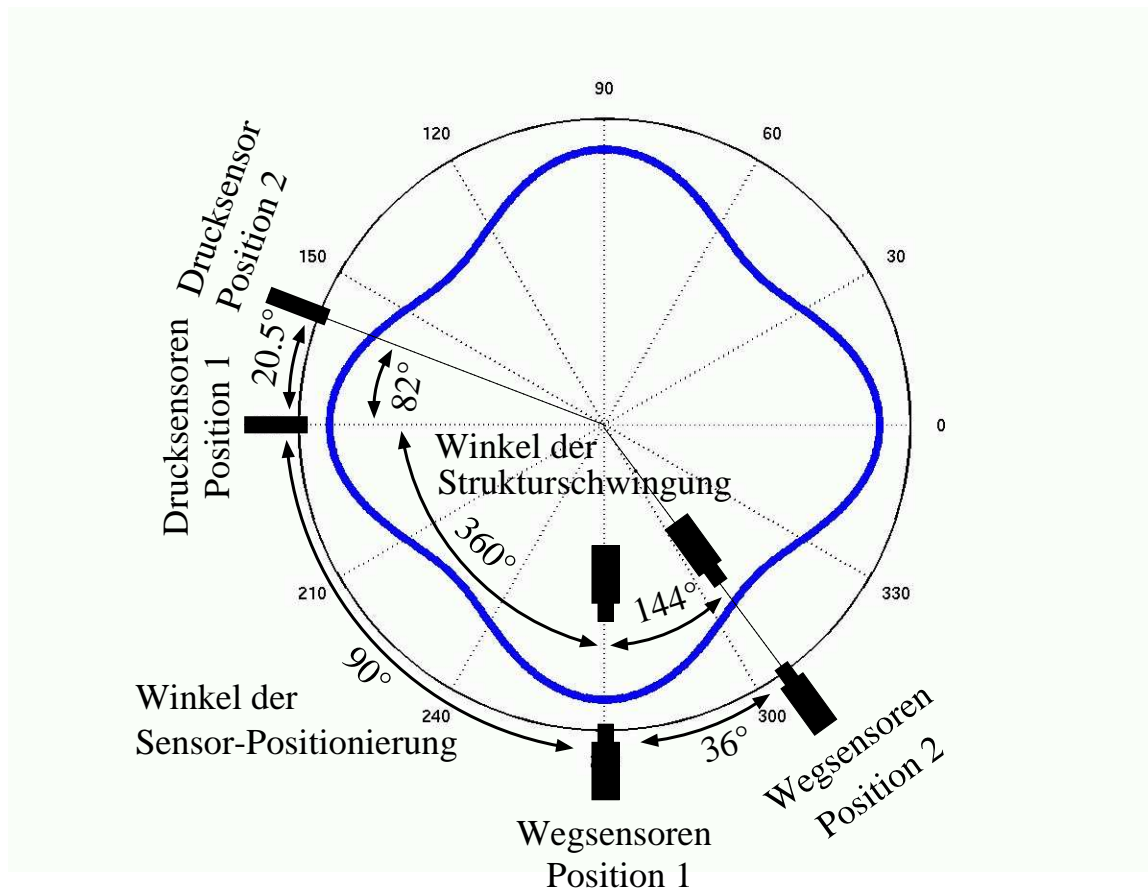


Abbildung 4.5: Identifikation der Eigenformen am Beispiel der Knotenzahl vier

In Bild 4.6 sind die gemessenen Phasenwinkel einer Schwingung der Knotenzahl zwei in einem Polardiagramm dargestellt. Der Radius, auf dem die verschiedenen Markierungen dargestellt sind, ist dabei ohne Bedeutung. In der Legende sind die Positionen samt der Geometriewinkel der zugehörigen Sensoren bezeichnet. Bei den Markierungen der Druckphasen fällt zunächst auf, dass jeweils zwei Markierungspaare mit nahezu identischen Winkeln zum benachbarten Paar einen kleinen Winkelunterschied aufweisen. Bei dieser Messreihe wurde in jeweils zwei Messungen die Druckrandbedingungen der vorhergehenden Messung nahezu exakt reproduziert, während die beiden Paare zueinander einen etwas größeren Unterschied aufweisen. Bei ca. 7 bar Einlassdruck wurden je zweimal Druckdifferenzen von ca. 1.1 bar und 1.4 bar eingestellt. Die gemessene Phase zwischen den Wegsensoren am Rotor variiert unterhalb der erwarteten 72° zwischen 66° und 71°. Zwischen den Markierungen der 0°-Positionen von Kavität und Labyrinthkammer ist ein kleiner Phasenwinkel erkennbar, der offensichtlich aus der Durchströmung des ersten Dichtspaltes resultiert. Nach dem Durchströmen des zweiten Dichtspaltes ist der Phasenwinkel am Ausstrom auf über 130° angewachsen. Dieser Phasensprung der Druckschwingung zwischen der Einlass- und der Auslassseite des Labyrinths tritt auch

bei niederdruckseitiger Befestigung der Strukturen auf. Die Unterschiede zwischen den Phasen der vier Einzelmessungen sind jedoch nahezu verschwunden. Die Druckamplituden sind -unabhängig von der Befestigungsseite- am freien Rand der Strukturen stets um mindestens eine Größenordnung kleiner als in der Labyrinthkammer. Die drei Winkelpositionen der Drucksensoren in der Kavität haben von der 0° -Position im Uhrzeigersinn Phasenwinkel von nahezu 90° für 41° Geometriewinkel, ca. 160° für 72° Geometriewinkel und ca. 220° für 103° Geometriewinkel. Die relativen Abweichungen vom idealen Phasenwinkel nehmen zumeist mit größerer Entfernung der betreffenden Sensoren zum Referenzsensor zu.

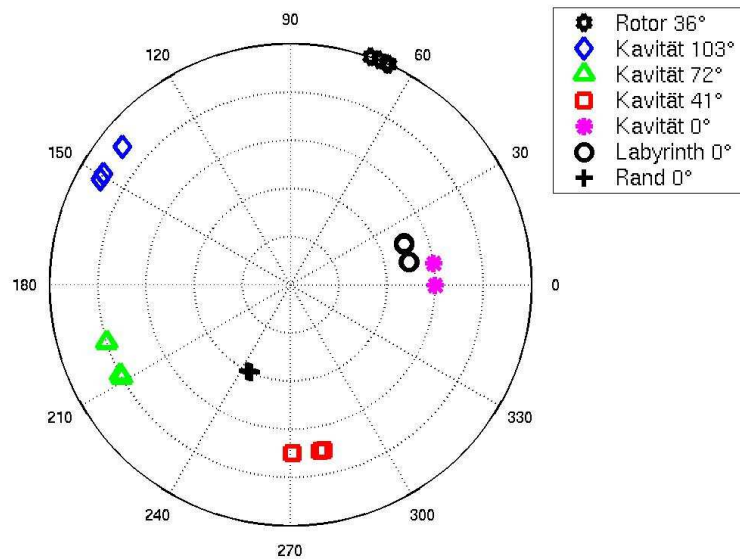


Abbildung 4.6: Gemessene Phasenwinkel der Knotenzahl zwei

Die in Abbildung 4.6 gezeigte Genauigkeit und Reproduzierbarkeit der Phasenwinkel und die resultierende Eindeutigkeit der Identifikation ist nicht bei allen Messungen gegeben. Mit zunehmender Strukturdicke nimmt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten winkelgenauer Schwingungsüberlagerungen stark zu. Dabei hat die Wanddicke des Stators offensichtlich den überwiegenden Einfluss auf die Güte der Überlagerung. Naheliegender ist daher die Vermutung, dass die aus den Bohrungen und Senkungen zur Drucksensorbefestigung resultierenden Imperfektionen der Statoren einen wesentlichen Beitrag zur unregelmäßigen Schwingungsüberlagerung leisten. Aus unregelmäßigen Überlagerungen von Schwingungen resultieren, je nach Abweichung der Parameter vom idealen Wert, Wellenbewegungen, die an den Messpunkten mit gleicher axialer Position zu unterschiedlich großen Amplituden führen. Auch die gemessenen Phasenwinkel

ermöglichen in diesem Fall keine genaue Identifikation der auftretenden Schwingungsform. Mit dem Vorabwissen, dass bei einer gekoppelten Schwingung stets gleiche Knotenzahlen bei Struktur und Druckfeld auftreten und dass alle Komponenten des gekoppelten Systems stets mit der gleichen Frequenz schwingen, kann jedoch bei der überwiegenden Zahl der gemessenen Schwingungszustände zumindest qualitativ die auftretende Eigenform identifiziert werden. Als Grundlage für die FE-Berechnung der Druckfelder und die Simulationsrechnungen werden nur diejenigen Messdaten herangezogen, die eine zuverlässige Bestimmung der auftretenden Druck- und Strukturamplituden zulassen.

Eine Fehlerquelle, die bereits im Zusammenhang mit der Frequenzauflösung der Messungen genannt wurde, ist die Möglichkeit von Amplitudenfehlern, die aus einer zu geringen Frequenzauflösung resultieren. Liegt die eigentliche Frequenz des gekoppelten Systems zwischen zwei Spektrallinien, so werden die tatsächlichen Amplituden in den Messungen unterschätzt. Bild 4.7 zeigt die Vergrößerung von drei Frequenzspektren. Die Ausschnitte zeigen die Spektrallinien der Strukturschwingung am Rotor und der Druckschwingung an einem Messpunkt in der Kavität und im Labyrinth in einer kleinen Umgebung um die Frequenz der Eigenform mit Knotenzahl zwei bei Hochdruckbefestigung. Es ist deutlich erkennbar, dass es sich sowohl bei der Strukturschwingung als auch bei der Druckschwingung um eine scharf begrenzte Schwingung bei einer diskreten Frequenz handelt. Aus der Form der Linienzüge ist erkennbar, dass die tatsächliche Frequenz der Schwingung offensichtlich zwischen den beiden Spektrallinien liegt. Sämtliche Amplitudenwerte dieser Messung weisen daher einen systematischen Fehler auf, der sich in einem zu kleinen Amplitudenwert äußert. Das Polardiagramm der gemessenen Phasenwinkel derselben Messung zeigt jedoch ein nahezu ideales Ergebnis und ist fast identisch mit dem Beispiel in Bild 4.6. Die Messung der Phasenwinkel ist generell genauer und zuverlässiger als die Messung der Amplitudenwerte.

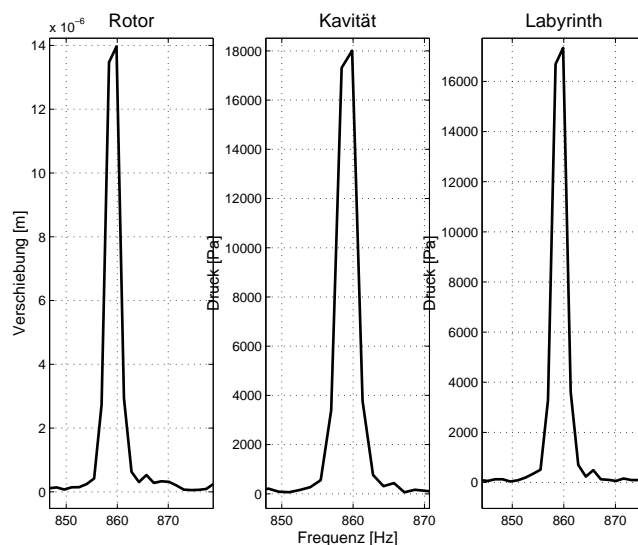


Abbildung 4.7: Amplitudenfehler durch zu geringe Frequenzauflösung

4.7 Ergebnisse der Messungen

4.7.1 Vorbemerkungen

Die nachfolgend beschriebenen Messergebnisse zeigen Zusammenhänge zwischen Änderungen der Versuchsparameter und den resultierenden Reaktionen des Systems. Die grundlegende Einteilung der Versuche erfolgt nach der Position der Kavität. Hochdruck- und niederdruckseitige Kavitäten zeigen eindeutige und in allen Messungen reproduzierbare Unterschiede hinsichtlich der Interaktion zwischen Strömung, Druckfeld und Strukturschwingungen. Die Position der Kavität hat einen sehr deutlichen Einfluss auf die Frequenz gleicher Moden des gekoppelten Systems. Die Steifigkeiten der Strukturen und der Einstromdruck sowie die Druckdifferenz führen zu Frequenz- und Amplitudenänderungen zwischen vergleichbaren Einzelmessungen, die hier beschrieben werden. Für den Rotor80 können die Auswirkungen einer veränderten Spalthöhe auf das Schwingungsverhalten anhand einiger Messreihen beschrieben werden. Weiterhin werden die Ergebnisse von Druckmessungen bei stationärer Strömung und wechselnder Position der Kavität dargestellt. Zur Durchführung dieser Messungen wurde eine der beiden Strukturen mit einem Reibungsdämpfer versehen, der die Entstehung von Schwingungen unterdrückt. Die Ergebnisse der Messungen können mit Strömungsberechnungen verglichen werden. Dieser Vergleich liefert Informationen über die Druckänderungen in der Labyrinthkammer, die als Erregerkräfte in den Simulationsrechnungen von Bedeutung sind.

Die Vorgehensweise samt der notwendigen Kriterien an die Messergebnisse zur eindeutigen Identifikation der Schwingungsordnung, also der Knotenzahl der Schwingung, wurde bereits in Abschnitt 4.5 beschrieben. Die eindeutige Bestimmung der Knotenzahl bildet die Grundlage für die Vergleichbarkeit einzelner Messungen. Weiterhin werden die Verläufe der charakteristischen Druckeigenformen in axialer Richtung, die zur Validierung des mathematischen Modells der Druckeigenformen notwendig sind, erst in Abschnitt 5.2 im direkten Vergleich mit den FE-Berechnungen beschrieben. Schließlich werden die gemessenen Frequenzen und Amplituden derjenigen Versuchskonfigurationen, die als Basis für die Simulationsrechnungen dienen, im jeweiligen Abschnitt von Kapitel 6.4 tabellarisch aufgeführt, um eine Zuordnung der Simulationsrechnung zu den gemessenen Daten der Schwingungszustände zu ermöglichen.

4.7.2 Messungen mit hochdruckseitiger Kavität

Phasenwinkel und Frequenzen des gekoppelten Systems

Die Messungen mit hochdruckseitiger Kavität und dem steifen Stator⁸⁸ zeigen bei allen Rotorvarianten Schwingungen der Knotenzahl zwei zwischen 837 Hz und 905 Hz . Die Frequenzen hängen von der Steifigkeit der verwendeten Rotoren, dem Druckniveau am Einstrom und der Druckdifferenz bei der jeweiligen Messung ab. Den stärksten Einfluss auf die Frequenz des gekoppelten Systems hat die Lage der Kavität und damit die Phase zwischen dem Druckfeld und den Strukturen. Abbildung 4.8 zeigt am Beispiel der Knotenzahl vier eine Skizze der gemessenen Struktur- und Druckphasen. Die Strukturschwingungen sind stets gegenphasig, so dass sich Abschnitte mit minimaler und maximaler Spalthöhe abwechseln. Die Druckschwingungen erreichen bei minimaler Spalthöhe ihr Amplitudenmaximum und umgekehrt. Die Hochdruckbereiche sind in der Skizze durch eine hohe Dichte von radialen Strichen dargestellt. Diese HD-Phasenlage entspricht einer positiven Koppelsteifigkeit, bei der die Druckkraft der Strukturverschiebung entgegenwirkt.

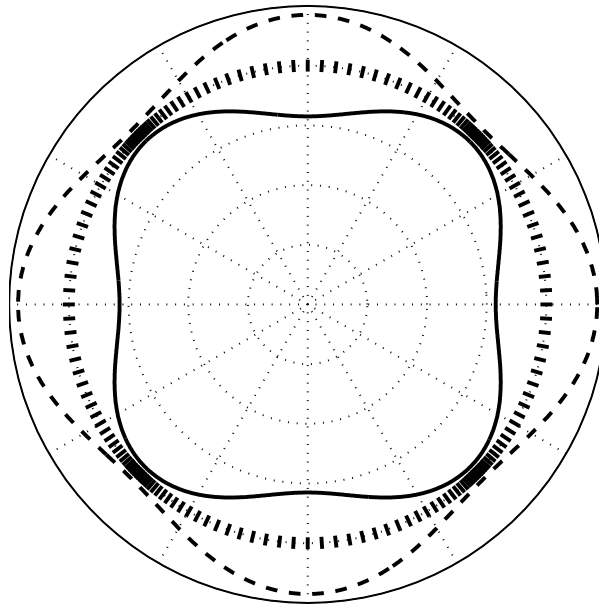


Abbildung 4.8: Skizze der Phase zwischen Druckfeld und Strukturen bei HD-seitiger Kavität und Knotenzahl vier

Die Druckverhältnisse sämtlicher Messungen liegen in einem engen Bereich zwischen 0.78 und 0.9. Wegen der relativ kleinen notwendigen Druckdifferenz zwischen Ausstrom- und Einstromseite konnten alle HD-Messungen mit abgestuften Einstromdrücken durchgeführt werden. In den Messungen ist eine Tendenz zu ansteigenden Frequenzen und

Schwingungsamplituden mit zunehmendem Einstromdruck und ansteigender Druckdifferenz erkennbar. Abbildung 4.9 zeigt eine 3D-Darstellung der gemessenen Frequenzen der Strukturkombination Rotor100/Stator88 über den Einstromdrücken von 4 *bar*, 6 *bar* und 8 *bar* und den Ausstromdrücken. Die Messpunkte sind alle in der rechten Halbebene und wegen der geringen Druckdifferenzen nahe bei der Raumdiagonalen angeordnet. Punkte in der linken Halbebene kämen einer Strömungsumkehr gleich. Die dargestellte Ebene interpoliert und extrapoliert die Messungen, so dass die beobachtete Änderung infolge anwachsender Zustromdrücke und Druckdifferenzen an den Achsen gut erkennbar ist. In dem eingefügten Piktogramm ist die Schwingungsform der Knotenzahl zwei angedeutet.

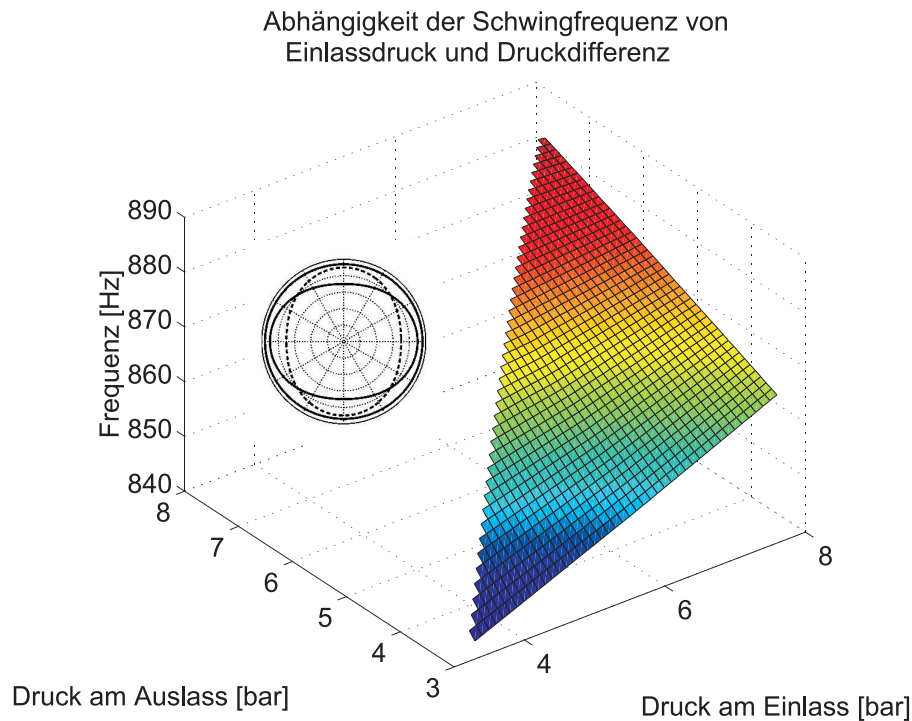


Abbildung 4.9: Gemessene Frequenzen der Knotenzahl zwei in Abhängigkeit von den Druckparametern

Die dargestellten Frequenzänderungen resultieren aus dem Verhältnis von Druck- und Strukturamplituden in Abhängigkeit von der Druckdifferenz. Wächst die Druckamplitude in der Kavität stärker an als die Strukturamplitude, so führt dies zu einer größeren Koppelsteifigkeit, die die Frequenz des Systems erhöht. Bei einer vollständigen Untersuchung der Frequenz-Abhängigkeit müssen daher auch die Amplitudenverhältnisse zwischen Strukturen und Druck berücksichtigt werden. Genaue Zusammenhänge liefern nur die Simulationsrechnungen einzelner Messungen, wie sie in Kapitel 6.4 beschrieben werden.

Amplituden und Frequenzen der Systemkomponenten

Für die steife Strukturkombination Rotor100/Stator88 werden bei 6.9 *bar* Einstromdruck Frequenzen um 898 *Hz* gemessen. Die Rotoramplitude beträgt in dieser Messreihe ca. 0.045 *mm*, die des Stators ca. 0.062 *mm*. Die Druckamplitude beträgt ca. 0.35 *bar*. Bei einer Variation der Druckdifferenz zwischen 0.85 *bar* und 1 *bar* streuen die Werte der Einzelmessungen nur wenige Prozent um die angegebenen Durchschnitte. Eine Reduktion des Einstromdruckes auf ca. 3.2 *bar* führt zu Frequenzen des Systems von ca. 885 *Hz*. Die Rotoramplitude beträgt nur noch ca. 0.035 *mm*, die des Stators wächst dagegen auf beträchtliche 0.105 *mm* an. Die Summe der beiden Amplituden entspricht damit nahezu der Ruhespalthöhe von 0.15 *mm*. Diese Strukturamplitude wird bei einer Druckamplitude in der Kavität von nur 0.2 *bar* und einer Druckdifferenz von 0.65 *bar* erreicht. Die folgende Abbildung 4.10 zeigt die Frequenzspektren des Rotors und zweier Druckmesspunkte für eine Messung bei 7 *bar* Einstromdruck.

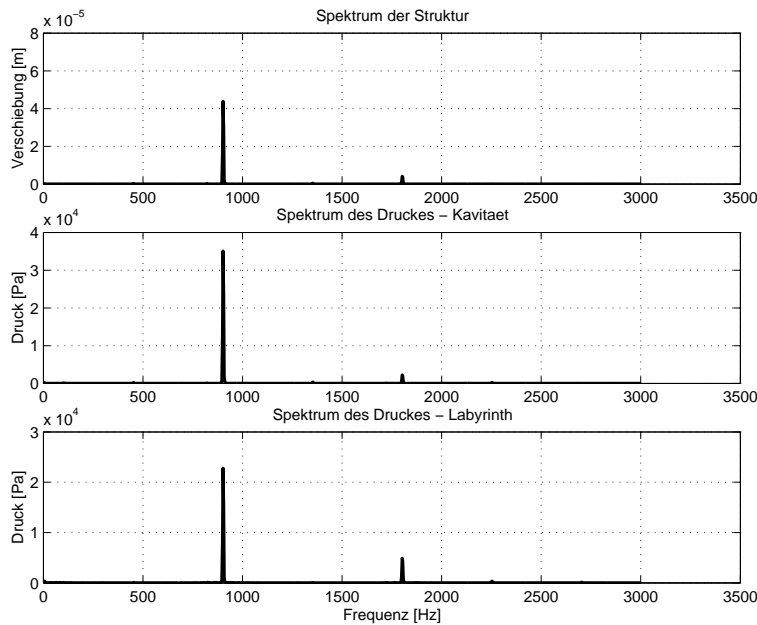


Abbildung 4.10: Frequenzspektren der Knotenzahl zwei des Systems mit steifem Rotor100

Für die Messungen mit dem Rotor80 stehen zwei Varianten mit 0.1 *mm* und 0.15 *mm* Spalthöhe zur Verfügung. Die Messungen mit dem kleineren Spaltspiel erlauben jedoch keine genaue Identifikation der Eigenformen. Die Messergebnisse mit 0.15 *mm* Spalthöhe zeigen größere Streuungen als die des Rotor100, die Eigenformen sind jedoch ausreichend genau zu identifizieren. Bei einem Einstromdruck von 6.9 *bar* und einer Druckdifferenz von 1 *bar* bis 1.45 *bar* werden bei ca. 865 *Hz* Rotoramplituden von 0.028 *mm* und Statoramplituden von 0.062 *mm* gemessen. Die Druckamplitude in der Kavität beträgt ca.

0.28 *bar*. Eine Verminderung des Einstromdruckes auf ca. 3.2 *bar* führt zu Frequenzen von ca. 850 *Hz* bei Druckdifferenzen von 0.6 *bar* bis 0.9 *bar*. Die Rotoramplituden erreichen ca. 0.02 *mm* und die Statoramplituden betragen zwischen 0.06 *mm* und 0.07 *mm*. Die Druckamplitude in der Kavität beträgt dann ca. 0.19 *bar*.

Die Messungen mit der Strukturkombination aus dem weichen Rotor14 mit dem steifen Stator88 sind nur teilweise zu identifizieren. Bei 6.9 *bar* Einstromdruck und Druckdifferenzen zwischen 0.65 *bar* und 1 *bar* liegt die Frequenz bei ca. 900 *Hz*. Die Rotoramplitude beträgt ca. 0.03 *mm*, während am Stator Amplituden von ca. 0.014 *mm* gemessen werden. Die Druckamplitude in der Kavität beträgt ca. 0.12 *bar*. Die identifizierbaren Messungen bei einem Einstromdruck von ca. 3.2 *bar* und einer Druckdifferenz von 0.7 *bar* zeigen eine Frequenz von ca. 840 *Hz* für das gekoppelte System. Die Amplituden von Rotor und Stator betragen jeweils ca. 0.02 *mm* und entsprechen damit in der Summe etwa den Messungen mit höherem Einstromdruck. Die Druckamplitude in der Kavität beträgt ca. 0.075 *bar*. Die geringer Druckamplitude bei gleicher Strukturamplitude führt offensichtlich zu einer geringeren Koppelsteifigkeit und damit zu niedrigeren Frequenzen des Systems.

Die Messdaten zeigen, dass die Steifigkeit des Rotors nur einen geringen Einfluss auf die gemessenen Systemfrequenzen hat. Die drei Rotorvarianten unterscheiden sich stark hinsichtlich der Eigenfrequenzen der zweiten Eigenform, die nach Tabelle 4.1 bei 335 *Hz*, 662 *Hz* und 800 *Hz* liegen. Die Schwingungen des dünnwandigen Rotor14 liegen bei Frequenzen zwischen 837 *Hz* und 903 *Hz*, während sie bei dem mittleren Rotor80 zwischen 842 *Hz* und 883 *Hz* und beim steifen Rotor100 zwischen 869 *Hz* und 905 *Hz* liegen. Offenbar hat das Verhältnis zwischen der Amplitude des Druckfeldes und den Strukturamplituden durch die daraus resultierende Koppelsteifigkeit einen stärkeren Einfluss auf die Frequenz des gekoppelten Systems, als die Eigenfrequenz des Rotors. Die in Abschnitt 6.4 beschriebenen Simulationsrechnungen berücksichtigen die flächige Gestalt der Druck- und Verschiebungsfelder und ermöglichen dadurch eine genauere Analyse der Interaktion im gekoppelten System, als es mit einer Abschätzung aus punktuell gemessenen Amplitudenwerten möglich ist.

Messungen stationärer Drücke im Labyrinth

Die Messung der stationären Drücke im Labyrinth erfolgte mit der steifen Strukturkombination und einer Dämpfungsvorrichtung am Stator, die das Entstehen und Aufklingen von Schwingungen unterdrückt. Abbildung 4.11 zeigt die gemessenen Drücke an drei Messpunkten über der Druckdifferenz der Messungen. Bei hochdruckseitiger Kavität sind trotz der Dämpfungsvorrichtung nur Druckdifferenzen bis ca. 2.5 *bar* möglich, ohne ein Aufklingen der Schwingungen hervorzurufen. Das Piktogramm skizziert die Strömungsrichtung durch die hochdruckseitige Kavität zum Labyrinth und die Sensorpositionen. Der erste Messpunkt vor dem Labyrinth zeigt nahezu konstante Einlassdrücke von 8.1 *bar* bis 8.2 *bar*. Die Auslassdrücke am dritten Messpunkt werden annähernd linear vermindert und geben, über der Druckdifferenz aufgetragen, die Schwankungen

der Drücke am Einlass wieder. Der zweite Messpunkt in der Labyrinthkammer zeigt für jede Druckdifferenz einen Druckwert, der zwischen Ein- und Ausstromdruck liegt. Auch hier werden die Druckschwankungen am Einlass deutlich nachvollzogen.

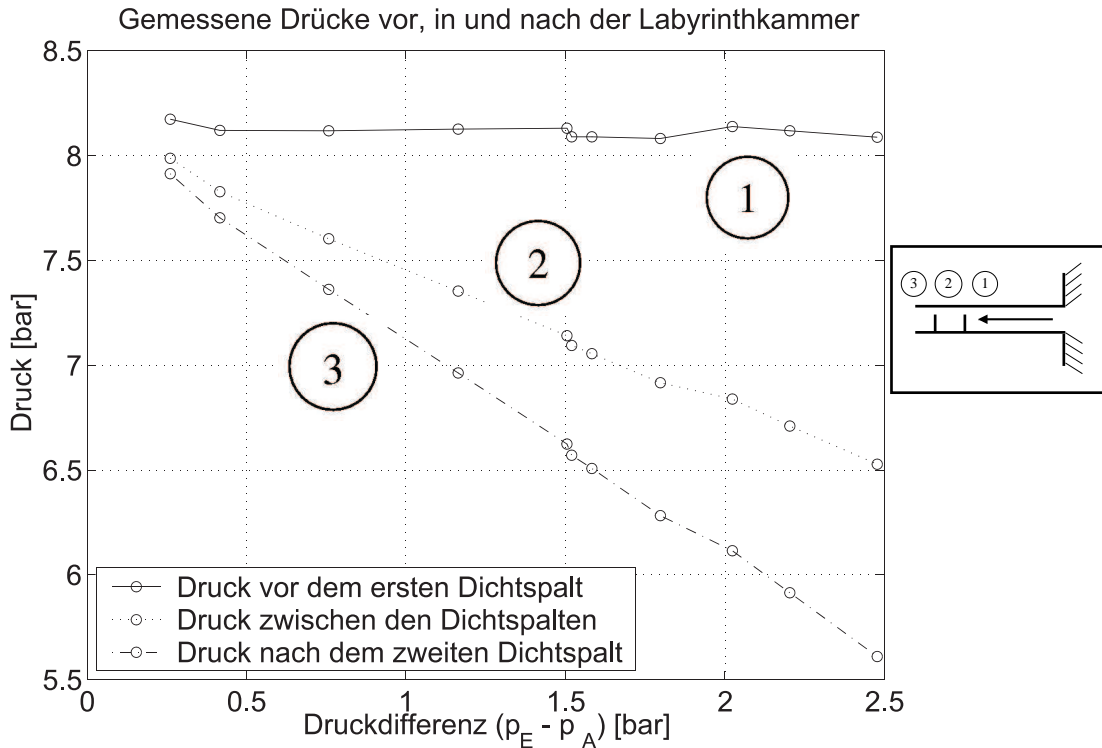


Abbildung 4.11: Gemessener Druck an drei Messpunkten bei hochdruckseitiger Befestigung

Die Drücke in der Labyrinthkammer liegen nicht mittig zwischen den Ein- und Auslassdrücken. Sie zeigen ein deutlich geringeres Druckgefälle zwischen Kammer und Ausstrom, als zwischen Einstromseite und Kammer. Zum Erreichen eines konstanten Massestromes gemäß $\dot{m} = \rho A v = \text{const.}$ sind wegen der Expansion des Fluids in der Labyrinthkammer unterschiedliche Strömungsgeschwindigkeiten in den Dichtspalten notwendig. Bei gleicher Spalthöhe wäre daher ein deutlich größeres Druckgefälle über dem zweiten Dichtspalt notwendig, um die notwendige Strömungsgeschwindigkeit für den konstanten Massestrom zu erreichen. Die Druckverläufe deuten daher darauf hin, dass die Spalthöhen zum Zeitpunkt der Messungen nicht mehr gleich waren. Wegen des unvermeidlichen Anstreichens der Dichtspitzen im Verlauf der Messungen muss ein erhöhter Verschleiß der randseitigen Dichtspitze angenommen werden. Infolge der axialen Struktureigenform tritt an dieser Dichtspitze zuerst Kontakt mit dem Stator auf, der zu verstärktem Verschleiß dieses Dichtstreifens führt.

Der in Abbildung 4.12 dargestellte Vergleich zwischen berechneten und gemessenen

Drücken in der Labyrinthkammer zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der Druckverläufe. Die beiden Druckverläufe sind nur an der unterschiedlichen Steigung zu unterscheiden. Der berechnete Druckverlauf zeigt eine größere Druckdifferenz zwischen Kammer und Ausstrom und entspricht somit dem erwarteten Verlauf bei konstanter Spalthöhe. Umgekehrt kann daraus geschlossen werden, dass die Spalthöhen bei den untersuchten Strukturen nicht identisch sind. Die Druckmessungen und der Vergleich mit berechneten Druckdaten kann daher als indirekter Nachweis für den ungleichmäßigen Verschleiß der Dichtstreifen angesehen werden. Die im Vergleich zum zweiten Dichtspalt geringere Spalthöhe zwischen Kavität und Kammer führt zu einer größeren Druckdifferenz und somit zu höheren Strömungsgeschwindigkeiten. Im dynamischen Fall, wenn das gekoppelte System zu Schwingungen angeregt wird, verstärkt dieser Verschleißmechanismus die Strömungsgeschwindigkeit und damit auch die Anregung des Druckfeldes an der Grenzfläche zwischen Kavität und Spalt. Der Verschleiß der Dichtstreifen verstärkt somit die Tendenz zum Auftreten von Schwingungen. Diese kann durch den Vergleich mit Messungen der Strukturkombination Rotor100/Stator88 bestätigt werden, die mit der ursprünglichen Sensoranordnung zu Beginn des Forschungsprojektes durchgeführt wurden. In diesen frühen Messungen wurden mit Druckdifferenzen von vergleichbarer Größe durchweg kleinere Struktur- und Druckamplituden in der Kavität erzielt. Die Frequenzen der Schwingungen blieben mit ca. 900 Hz dagegen unverändert.

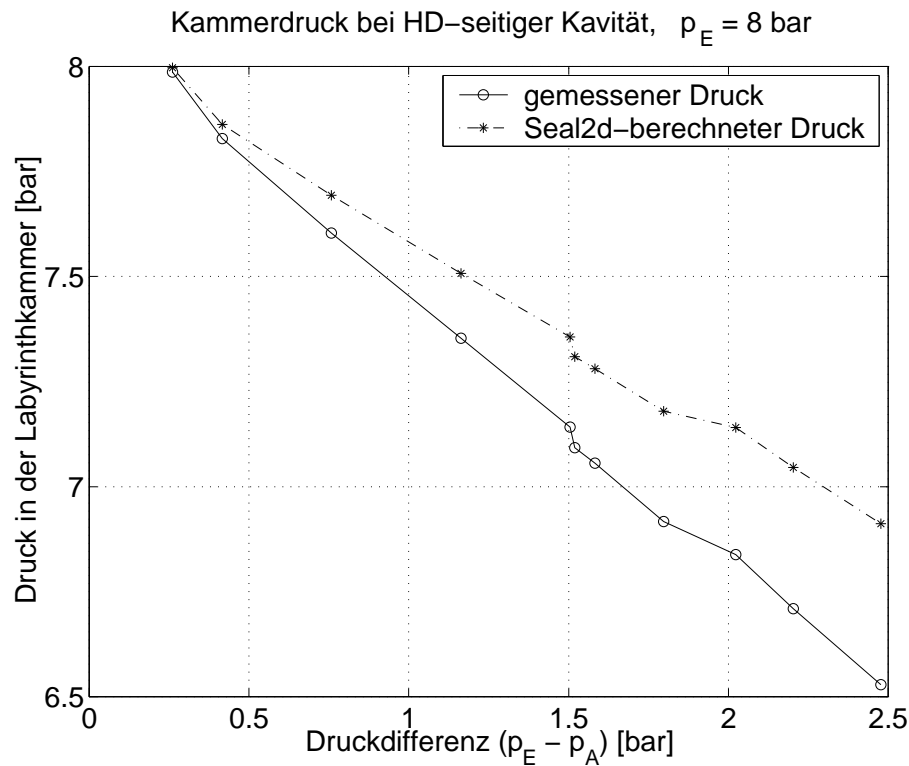


Abbildung 4.12: Vergleich der berechneten und gemessenen Drücke in der Labyrinthkammer (HD)

4.7.3 Messungen mit niederdruckseitiger Kavität

Phasenwinkel und Schwingungsordnung des gekoppelten Systems

Bei den Messungen mit niederdruckseitiger Befestigung der Strukturen werden für die steife Strukturkombination Rotor100/Stator88 überwiegend Eigenformen der Knotenzahl drei identifiziert. Die gemessenen Frequenzen und Schwingungsamplituden von fünf Einzelmessungen sind in Tabelle 4.2 am Ende des Kapitels aufgelistet. Da bei den steifen Strukturen recht große Druckdifferenzen zur Schwingungsanregung notwendig sind, wurden alle Messungen mit einem Einstromdruck von ca. 6.9 *bar* durchgeführt. Sämtliche Messungen der Strukturkombination Rotor100/Stator88 sind von sehr guter Qualität im Hinblick auf die Ausbildung umlaufender Wellen, so dass sowohl die Phasenwinkel als auch die Amplitudenmessung zuverlässige Daten liefern.

In zwei von acht Messungen einer Messreihe lassen sich eindeutig Eigenformen der Knotenzahl zwei identifizieren. Obwohl die beiden Messungen bei Druckdifferenzen von 1.7 *bar* und 2.7 *bar* durchgeführt wurden, sind die Frequenzen mit 684 *Hz* und 694 *Hz* nahezu gleich. Die Druckamplitude in der Kavität beträgt 0.265 *bar* bzw. 0.28 *bar*. Die Strukturamplituden betragen bei beiden Messungen in der Summe ca. 0.055 *mm*, wobei die Rotoramplituden kleiner 10 μm sind. Ein gleichzeitiges Auftreten von Schwingungen mit der Knotenzahl zwei und drei in derselben Messung wurde nicht beobachtet. Die Ursache für das alternative Auftreten der beiden Moden bei vergleichbaren Druckverhältnissen ist nicht bekannt. Die Frequenzen der Schwingungen mit der Knotenzahl drei liegen zwischen 926 *Hz* und 973 *Hz*. Die zugehörigen Druckverhältnisse variieren zwischen 0.74 und 0.45. Die Druckverhältnisse gelten jedoch für die gesamte Dichtung, also zwei aufeinander folgende Dichtspalte, so dass in keinem der Einzelspalte das kritische Druckverhältnis und damit Schallgeschwindigkeit erreicht wird.

Für das häufigere Auftreten der Knotenzahl drei sind möglicherweise die nahezu übereinstimmenden Struktureigenfrequenzen dieses Modes bei 1128 *Hz* (Rotor) und 1096 *Hz* (Stator) als Ursache anzusehen. Die Messungen der Strukturkombination Rotor100/Stator88 sind wegen der eindeutigen Identifizierbarkeit bei HD- und ND-Position der Kavität wichtig für die Simulationsrechnungen in Abschnitt 6.4. Zur Validierung des mathematischen Modells der Druckmoden in Abschnitt 5.1.3 sind die Messungen mit der Knotenzahl drei von großer Bedeutung, weil die relative Stabilität dieser ND-Strukturkombination Messungen mit stark variierenden Druckdifferenzen zulässt. Dies führt dazu, dass die Geschwindigkeitsänderungen im Dichtspalt in einem weiten Bereich variieren und dadurch unmittelbare Auswirkung auf die Koeffizienten der partiellen Differentialgleichung haben. Vergleiche der aus den resultierenden Koeffizienten berechneten Druckeigenformen mit den gemessenen Druckfeldern tragen zur Verifizierung des Modells bei.

Die Frequenzen des gekoppelten ND-Systems mit dem Rotor80 liegen unterhalb der

Frequenzen, die mit dem steifen Rotor100 gemessen wurden und weisen damit einen noch größeren Frequenzabstand zu den HD-Messungen derselben Strukturkombination auf. Die gemessene Phase zwischen dem Druckfeld und den Strukturen weist gegenüber den HD-Messungen einen Phasenwinkel von 180° auf. Die Druckkräfte wirken also in Richtung der Strukturverschiebung und können als negative Koppelsteifigkeit interpretiert werden, die die Frequenz der gekoppelten Schwingung gegenüber den HD-Messungen stark absenkt. In Abbildung 4.13 ist die gemessene Phase des Druckfeldes in der Kavität am Beispiel der Knotenzahl vier skizziert. Die Dichte der radialen Striche zeigt die Verteilung von Hoch- und Niederdruckbereichen zwischen den gegenphasigen Strukturschwingungen.

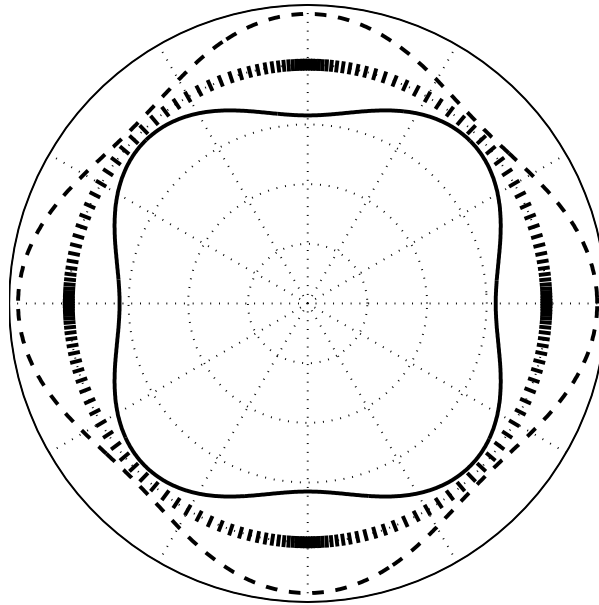


Abbildung 4.13: Skizze der Phase zwischen Druckfeld und Strukturen bei ND-seitiger Kavität und Knotenzahl vier

Einfluss von Struktursteifigkeit und Spaltspiel

Die ND-Messungen mit dem mittleren Rotor80 und dem Stator88 sind überwiegend von weniger guter Qualität hinsichtlich der winkelgenauen Schwingungsüberlagerung. Dennoch ist häufig eine eindeutige Identifikation der Moden durch die gemessenen Frequenzen möglich, da diese von der Überlagerung der orthogonalen Eigenschwingungen unabhängig sind. Gegenüber den Messungen mit steifem Rotor benötigen die Messungen mit dem mittleren Rotor80 wesentlich kleinere Druckdifferenzen zwischen Ein- und Ausstromseite des Labyrinths um deutlich messbare Schwingungsamplituden zu erzeugen. Von dieser Strukturkombination konnten daher Messungen mit Einstromdrücken

von 3 bar, 5 bar und 7 bar gemacht werden. Mit dem Rotor80 konnten Messungen mit 0.1 mm und 0.15 mm Spalthöhe durchgeführt werden. Dabei zeigte sich, dass die Spalthöhe offensichtlich auch einen Einfluss auf die Schwingungsordnung der dominanten Eigenform hat. Auch bei dieser Strukturkombination treten die gemessenen Knotenzahlen zwei und drei nicht gemeinsam in derselben Messung auf.

Die Moden der Strukturkombination Rotor80/Stator88 mit dem kleineren Spaltspiel von 0.1 mm lassen sich eindeutig als Knotenzahl drei identifizieren. Sie weisen jedoch größere Streuungen der Messdaten auf, als in den Messungen mit der steifen Strukturkombination. Da durch den weniger steifen Rotor80 die notwendigen Druckdifferenzen zur Erzeugung deutlicher Schwingungsamplituden reduziert werden, können Messungen mit abgestuften Einlassdrücken durchgeführt werden. Bei 7 bar Einlassdruck konnten zwei Gruppen von Schwingungen in einer Messreihe gefunden werden. Zwischen 880 Hz und 900 Hz treten dreimal Schwingungen bei Druckdifferenzen von 1.2 bar bis 1.7 bar auf. Die Schwingungsamplituden des Rotors liegen bei ca. 0.06 mm, die des Stators dagegen lediglich zwischen 9 µm und 16 µm. Die Amplitude des Druckfeldes in der Kavität liegt bei ca. 0.17 bar. Zwei Systemschwingungen wurden übereinstimmend bei einer Druckdifferenz von ca. 0.35 bar und einer Frequenz von 830 Hz gemessen. Die Rotoramplituden betragen ca. 0.035 mm, die des Stators ca. 0.01 mm. Die Druckamplitude in der Kavität beträgt ca. 0.1 bar. Die folgende Abbildung 4.14 zeigt drei Frequenzspektren der Messung bei 900 Hz mit sehr scharfen Spektrallinien für die Schwingung des Rotors und die des Druckes an zwei Messpunkten. Die Druckamplitude in der Labyrinthkammer ist bei dieser ND-Strukturkombination von vergleichbarer Größe wie die Amplituden in der Kavität.

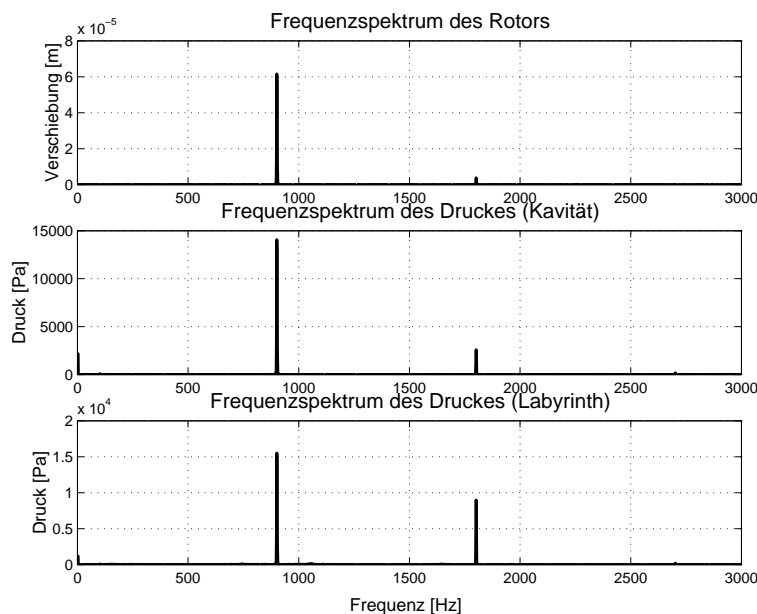


Abbildung 4.14: Frequenzspektren der ND-Messung des Rotor80 mit der Knotenzahl drei

Eine Reduzierung des Einstromdruckes auf ca. 3.2 *bar* führt zu keiner relevanten Änderung der Systemfrequenzen. Wieder wurden zwei Gruppen von Schwingungen bei untereinander vergleichbaren Druckdifferenzen gemessen. Eine Druckdifferenz von 0.95 *bar* führt zu Frequenzen von ca. 880 *Hz* mit Rotoramplituden um 0.055 *mm* und Statoramplituden von ca. 3 μm . Die Druckamplitude in der Kavität beträgt ca. 0.075 *bar*. Eine Verminderung der Druckdifferenz auf ca. 0.32 *bar* führt zu Schwingungen bei 860 *Hz*. Die Rotoramplituden liegen bei ca. 0.04 *mm*, während die Statoramplituden lediglich ca. 5 μm betragen. Die Druckamplitude in der Kavität beträgt ca. 0.05 *bar*.

Die identifizierbaren Messungen mit der größeren Spalthöhe von 0.15 *mm* weisen stets die Knotenzahl zwei auf. Bei einem Einstromdruck von 6.9 *bar* wurde mit einer Druckdifferenz von ca. 1.3 *bar* eine Rotoramplitude von ca. 0.11 *mm* und eine Amplitude des Druckfeldes von ca. 0.2 *bar* bei 581 *Hz* gemessen. Bei einem Einstromdruck von 3.2 *bar* und einer Druckdifferenz von 0.25 *bar* reduzierte sich die Schwingungsamplitude des Rotors auf ca. 0.075 *mm* und die des Druckfeldes auf 0.068 *bar* bei einer Frequenz von 565 *Hz*. Die Schwingungsamplitude des Stators beträgt bei diesen Messungen nur wenige μm und ist damit weitaus kleiner als die Rotoramplitude, was auch hier bei der Knotenzahl zwei auf einen Betriebspunkt nahe einer Nullstelle der Stator-Amplitudenverstärkung schließen läßt.

Messungen stationärer Drücke im Labyrinth

Die Messungen des Druckverlaufs in der Labyrinthkammer bei schwingungsgedämpftem Stator weisen bei niederdruckseitiger Kavität einen wesentlich größeren Bereich messbarer Druckdifferenzen auf, als bei HD-Befestigung. Durch die Schwingungsdämpfung kann bei ND-seitiger Kavität bis auf Atmosphärendruck entspannt werden. Der in Abbildung 4.15 dargestellte Druck in der Labyrinthkammer verläuft bei den ND-Messungen deutlich näher am Zustromdruck, als bei den HD-Messungen. Auch ist die aus der Thermodynamik bekannte Limitierung der Strömungsgeschwindigkeit beim Erreichen des kritischen Druckverhältnisses deutlich erkennbar [HAE91]. Beim Erreichen des kritischen Druckverhältnisses im ausstromseitigen Spalt kann die Strömung die Schallgeschwindigkeit nicht überschreiten und der Massestrom ist dadurch begrenzt. Der Druck in der Labyrinthkammer liegt dann gerade auf demjenigen Niveau, das notwendig ist, um diesen konstanten Massestrom durch den einstromseitigen Dichtspalt zu erreichen. Die Limitierung der Strömungsgeschwindigkeit am Austromspalt, dessen Strömungsänderungen das Druckfeld in der Kavität anregen, führen zu einer geringer werdenden Intensität der Anregung bei steigender Druckdifferenz, da die Geschwindigkeit weniger abhängig von der Spalthöhe wird. Dieser Effekt zeigt sich in den Messungen mit der steifen ND-Konfiguration aus Rotor100 und Stator88, die ausreichend hohe Druckdifferenzen zulässt. In dieser Messreihe mit der Knotenzahl drei nehmen die Amplituden der Strukturen und des Druckes mit steigender Druckdifferenz ab, während die Druckeigenform eine deutliche Änderung der axialen Gestalt aufweist.

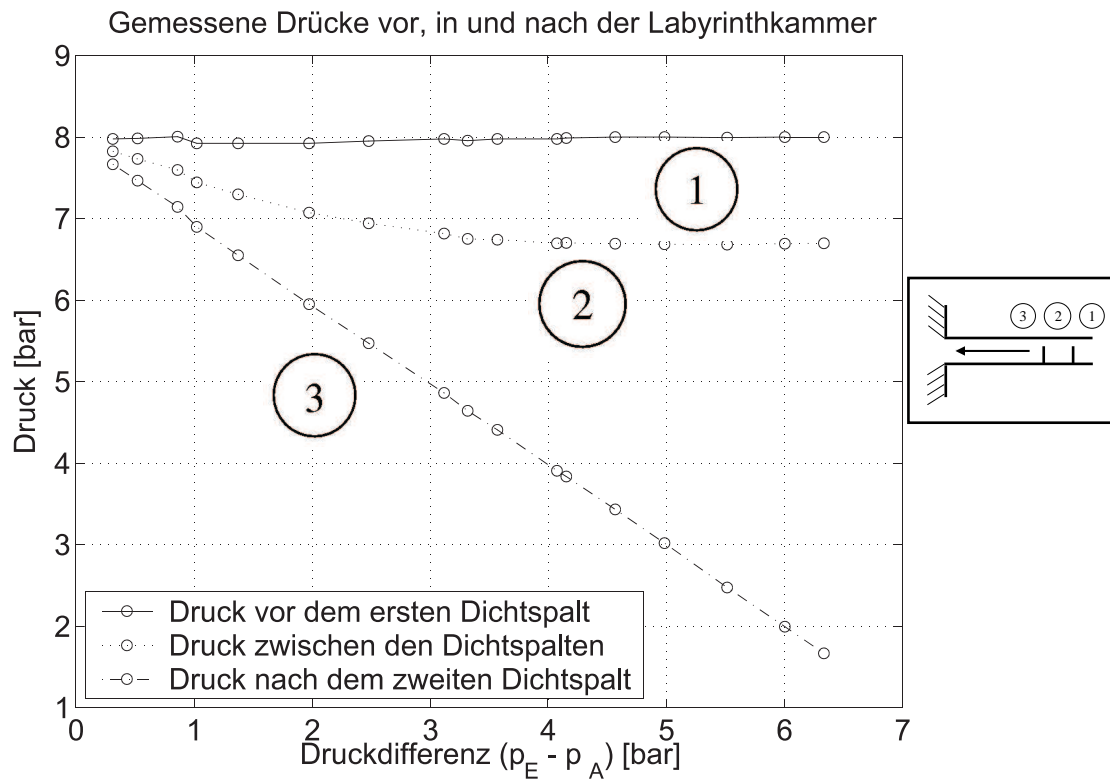


Abbildung 4.15: Gemessener Druck an drei Messpunkten bei niederdruckseitiger Befestigung

Die Ursache für die größere Nähe des Kammerdruckes zum Einstromdruck kann auch hier durch den unterschiedlichen Verschleißzustand der Dichtstreifen erklärt werden. Bei der ND-Einbaurichtung ist der Dichtspalt mit größerer Schwingungsamplitude und entsprechend stärkerem Materialabtrag an der Spitze auf der Einstromseite. Der Dichtspalt an der Grenzfläche zur Kavität weist demnach weniger Verschleiß auf und hat eine geringere Ruhespalthöhe. Um einen konstanten Massestrom durch das gesamte Labyrinth zu erreichen, ist also ein relativ hohes Druckniveau in der Kammer notwendig. Die relativ geringe Druckdifferenz zum Einlassdruck reicht aus, um durch den größeren Spalt die notwendige Masse des Fluids mit hoher Dichte fließen zu lassen. Die größere Druckdifferenz zwischen Kammer und Ausstromseite ist notwendig zum Erreichen eines konstanten Massestroms des expandierten Fluids. Ist im ausstromseitigen Dichtspalt das kritische Druckverhältnis erreicht, so ändert sich das Druckniveau in der Kammer nicht mehr, trotz weiter sinkenden Auslassdruckes.

Ein Vergleich der gemessenen Drücke in der Kammer mit den Werten aus Strömungsberechnungen mit gleichen Spalthöhen ist in Abbildung 4.16 dargestellt. Auch bei den ND-Berechnungen ist die Übereinstimmung der beiden Druckverläufe sehr gut.

Geringfügige Streuungen der einstromseitigen Drücke führen in beiden Kurven zu nahezu übereinstimmenden Änderungen der Druckwerte. Die berechneten Drücke zeigen jedoch mit zunehmender Druckdifferenz einen linear zunehmenden Abstand von den gemessenen Drücken. Die identischen Spalthöhen in der Rechnung erfordern also eine größere Druckdifferenz zwischen Einstrom und Kammer, um einen konstanten Massestrom zu erreichen. Das kritische Druckverhältnis wird erst bei etwas größerer Druckdifferenz im zweiten Spalt erreicht. Mit dem Erreichen dieses Druckes in der Kammer bleiben auch die berechneten Druckwerte konstant.

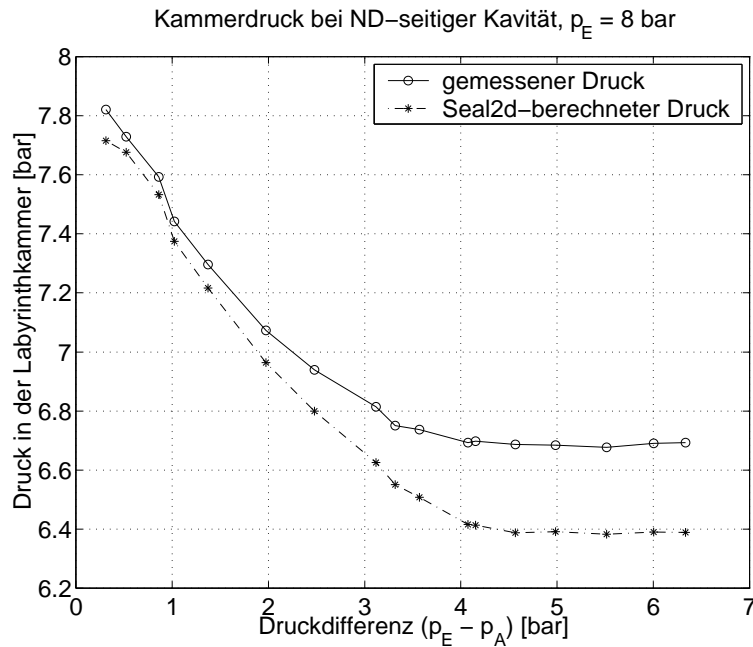


Abbildung 4.16: Vergleich der gemessenen und berechneten Drücke in der ND-Labyrinthkammer

Den konstanten Drücken in der Labyrinthkammer bei überkritischen Druckverhältnissen geht bereits bei kleineren Druckdifferenzen eine Abflachung des Druckverlaufs voraus. Dies bedeutet, dass die Druckänderungen im Labyrinth im Vergleich zu den ausstromseitigen Druckänderungen in der Kavität relativ kleiner werden. Da die dynamische Druckänderung in der Kavität als Druckrandbedingungen für die Strömung im Labyrinth anzusehen sind, nimmt bei ansteigender Druckdifferenz die Druckänderung im Labyrinth ab. Dies führt zu einer kleiner werdenden Fluid-Erregerkraft auf die schwingenden Strukturen. So hat die Vergrößerung der Druckdifferenz schließlich eine stabilisierende Wirkung auf die Schwingung des gekoppelten Systems. Dies äußert sich in einer beobachteten Zunahme der Druckdifferenzen zur Anregung von Schwingungen während der Betriebsdauer des Prüfstandes. Die Stabilisierung einer Labyrinthdichtung durch

Vergrößerung des ersten Spaltes in Strömungsrichtung wird auch von LEWIS et al. beschrieben [LEW78].

In der folgenden Tabelle 4.2 ist für die steife Strukturkombination Rotor100/Stator88 und niederdruckseitige Position der Kavität die Abhängigkeit der gemessenen Druck- und Strukturamplituden von der Druckdifferenz aufgelistet. Die Daten in der Tabelle zeigen, dass bei den ND-Messungen mit zunehmender Druckdifferenz die Druckamplituden im Labyrinth und in der Kavität abnehmen. Mit kleiner werdender Fluid-Erregerkraft im Labyrinth nehmen die Strukturamplituden ab, so dass auch die Änderung der Strömungsgeschwindigkeit im Dichtspalt als Anregung für das Druckfeld kontinuierlich abnimmt. Die Zunahme der Strömungsgeschwindigkeit mit anwachsender Druckdifferenz führt im Extremfall zu Schallgeschwindigkeit im Dichtspalt. Mit dem Erreichen dieser Grenzgeschwindigkeit verschwindet die Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit von der Spalthöhe und damit die Anregung der Druckfelder in der Kavität. Bei den steifen Strukturkombinationen und ND-seitiger Position der Kavität, führt eine Vergrößerung der Druckdifferenz somit zum Abklingen der gekoppelte Schwingung. Bei den Prüfstandsversuchen konnte durch Öffnen des Kugelhahnes und Ausstrom gegen Atmosphärendruck ein vollständiges Abklingen der Schwingungen erreicht werden.

DRUCKDIFFERENZ	2.6 BAR	2.7 BAR	3.3 BAR	3.36 BAR	3.75 BAR
Frequenz	936 Hz	934 Hz	948 Hz	954 Hz	972 Hz
Druckamplitude Labyrinth	0.177 bar	0.17 bar	0.155 bar	0.158 bar	0.115 bar
Druckamplitude Kavität	0.37 bar	0.355 bar	0.27 bar	0.27 bar	0.194 bar
Wegamplitude Rotor	0.027 mm	0.026 mm	0.02 mm	0.022 mm	0.016 mm
Wegamplitude Stator	0.08 mm	0.076 mm	0.056 mm	0.057 mm	0.035 mm

Tabelle 4.2: Abhängigkeit der Druck- und Wegamplituden von der Druckdifferenz (ND-Messungen und Knotenzahl drei von Rotor100/Stator88)

Die in der Tabelle aufgeführten Messungen zeigen weiterhin einen deutlichen Anstieg der Systemfrequenzen bei ansteigender Druckdifferenz. Vergleicht man die Druckamplituden in der Kavität mit den Strukturamplituden, so ist zu erkennen, dass die Strukturamplitude um mehr als 50 % abnimmt, während sich die Druckamplitude in der Kavität um weniger als 50 % vermindert. Aus dem Verhältnis von Druck und Weg resultiert damit eine betragsmäßig kleinere Koppelsteifigkeit, die bei niederdruckseitiger Position der Kavität ein negatives Vorzeichen hat. Daraus folgt, dass diese kleinere, jedoch negative ND-Koppelsteifigkeit bei ansteigender Druckdifferenz zu einem Anstieg der gemessenen Frequenz führt.

5 Modale Druckfelder

5.1 Modellbildung der Druckfelder

5.1.1 Akustische Wellengleichung und HELMHOLTZ-Gleichung

Das einfachste mathematische Modell der modalen Druckfelder in der Kavität ist die Eigenwertformulierung der akustischen Wellengleichung. Diese Gleichung kann in einem Geometriemodell der Kavität mit der Methode der finiten Elemente (FEM) durch numerische Berechnungen gelöst werden. Hierzu wird das Programm FEMLAB benutzt, welches ein auf der Programmier-Software MATLAB basierendes FE-Programm ist, mit dem nahezu beliebige partielle Differentialgleichungen (PDG) gelöst werden können. Die Herleitung der akustischen Wellengleichung ist bei KOLLMANN [KOL93] angegeben und wird nachfolgend kurz beschrieben. Die Ausgangsgleichungen sind die EULERSche Gleichung der Hydrodynamik (Impulserhaltung) für die Dichte ρ^* , die Fluidgeschwindigkeit v^* und den hydrostatischen Druck p^*

$$\rho^* \cdot \left[\frac{\partial v^*}{\partial t} + (\text{grad } v^*) \cdot v^* \right] = -\text{grad } p^*, \quad (5.1)$$

die Kontinuitätsgleichung (Masseerhaltung)

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \text{div}(\rho^* v^*) = 0 \quad (5.2)$$

und die Gleichung für eine adiabatische Zustandsänderung mit dem Adiabatenexponenten κ

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{\rho^*}{\rho_0} \right)^\kappa. \quad (5.3)$$

Für die weitere Herleitung der Wellengleichung nennt KOLLMANN einige Annahmen und Vereinfachungen:

- Druck und Dichte werden durch einen Ruheanteil und einen Störanteil beschrieben ($p^* = p_0 + p$ bzw. $\rho^* = \rho_0 + \rho$). Die Geschwindigkeit v^* der Fluidteilchen ist ausschließlich ein Störanteil, da ein ruhendes Fluid vorausgesetzt wird ($v^* = v$).
- Die Störanteile werden als klein gegenüber den Ruheanteilen angenommen. Produkte aus Störanteilen werden daher vernachlässigt. Aus diesem Grund entfällt der

konvektive Term in Gleichung 5.1 vollständig und der Ausdruck für die Divergenz von ρv in Gleichung 5.2 vereinfacht sich durch Vernachlässigung von Produkten aus Störanteilen.

Weiterhin gibt KOLLMANN eine Abschätzung für die Druckänderung p an, die er aus Gleichung 5.3 gewinnt. Diese lautet

$$p = \kappa \frac{\rho}{\rho_0} p_0. \quad (5.4)$$

Schließlich führt KOLLMANN mit der Gaskonstante von Luft R die Abkürzung

$$a^2 := \kappa \frac{p_0}{\rho_0} = \kappa R T \quad (5.5)$$

ein. Diese Definitionsgleichung bezeichnet das Quadrat der adiabaten Schallgeschwindigkeit a im ruhenden Fluid. Die Schallgeschwindigkeit ist somit für ein bestimmtes Medium nur von der thermodynamischen Temperatur T abhängig. Setzt man den Ausdruck 5.5 in die linearisierte Adiabatengleichung 5.4 ein, so kann die bereits linearisierte Kontinuitätsgleichung 5.2 weiter vereinfacht werden und es folgt

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} v = 0. \quad (5.6)$$

Berechnet man von der ebenfalls bereits vereinfachten EULER-Gleichung die Divergenz, um die Geschwindigkeit zu eliminieren, so wird von der Möglichkeit gebrauch gemacht, die Reihenfolge von zeitlicher Ableitungen und Divergenz zu vertauschen. Weiterhin wird der LAPLACE-Operator angewendet, der einer zweifachen Ableitung entspricht.

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} v) = -\Delta p. \quad (5.7)$$

Wird nun Gleichung 5.6 nach der Zeit differenziert und in Gleichung 5.7 eingesetzt, so folgt die bekannte Form der akustischen Wellengleichung

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p, \quad (5.8)$$

in der ausschließlich der Störanteil des Druckes vorhanden ist. Weiterhin zeigt KOLLMANN, dass auch ein Geschwindigkeitspotential ϕ der Teilchenschwingung im Fluid, für das die Gleichung

$$v = -\operatorname{grad} \phi \quad (5.9)$$

gilt, der Wellengleichung genügt. Die Geschwindigkeitsamplitude der Teilchenschwingung wird in der Akustik als Schnelle bezeichnet. Voraussetzung für die Beschreibung des Schnellefeldes v durch den Gradienten einer Potentialfunktion ist dessen Wirbelfreiheit, was bei einem ruhenden Fluid stets der Fall ist. Weiter zeigt KOLLMANN, dass für Anwendungen in der Akustik die Wellengleichung des Geschwindigkeitspotentials

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \Delta \phi, \quad (5.10)$$

häufig geeigneter ist, da sich aus der Potentialfunktion die Schnelle durch Differenzieren nach den räumlichen Koordinaten gemäß der Gleichung 5.9 berechnen läßt. Auch der Druck kann durch Differenzieren nach der Zeit aus dem Schnellepotential gemäß

$$p = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.11)$$

berechnet werden. Dieser Darstellungsweise ist unmittelbar zu entnehmen, dass die zeitliche Phase zwischen den Schwingungen von Druck und Schnelle für einen sinusförmigen Druckverlauf gerade $\pi/2$ beträgt und die beiden Funktionen sich zueinander wie Sinus und Cosinus verhalten. Die Schnelle erreicht daher an den Knotenpunkten bzw. -linien der Druckfunktion ihre Extremwerte und umgekehrt. Dieser Zusammenhang zwischen Druck und Schnelle gilt nicht nur in zeitlicher Hinsicht, sondern auch für die räumliche Anordnung von Druck und Schnelle. Bei BERGMANN-SCHÄFER [BER70] wird dies am Beispiel von stehenden Wellen in vollständig offenen oder einseitig geschlossenen Rohren beschrieben, wie sie bei der Tonerzeugung in Orgelpfeifen typisch sind.

Zur Berechnung modaler Druckfelder ist es notwendig, die Wellengleichung 5.8 in eine Eigenwertgleichung umzuformen. Dabei wird die Zeitabhängigkeit der Gleichung in eine Frequenzabhängigkeit umformuliert. Erreichen läßt sich dies durch den Ansatz einer harmonischen Druckfunktion bezüglich der Zeitabhängigkeit. Die durch diesen Ansatz ausschließlich ortsabhängige Druckfunktion kann dann als Eigenform des modalen Druckfeldes durch eine FE-Berechnung bestimmt werden. Für die Kreisfrequenz ω und einen beliebigen Ortsvektor r lautet die Funktion für den Druck

$$p(r, t) = p(r) \sin(\omega t). \quad (5.12)$$

Daraus resultiert die zweite zeitliche Ableitung der Funktion als

$$\ddot{p}(r, t) = -\omega^2 p(r) \sin(\omega t). \quad (5.13)$$

Die Sinusfunktion bleibt bei der zweiten Ableitung mit negativem Vorzeichen erhalten und die Kreisfrequenz der Schwingung tritt quadratisch als Vorfaktor auf. Stellt man die Wellengleichung 5.8 um und teilt den Laplace-Operator wieder auf in einen Divergenz- und einen Nablaoperator als räumlichen Druckgradienten, so folgt nach Einsetzen der zweimal differenzierten Ansatzfunktion 5.13 die als HELMHOLTZ-Gleichung [FEM00] bezeichnete Eigenwertform der akustischen Wellengleichung

$$\nabla \cdot (a^2 \nabla p) = -\omega^2 p, \quad (5.14)$$

bzw. die geläufigere Formulierung

$$-a^2 \cdot \Delta p = \omega^2 p. \quad (5.15)$$

In dieser Gleichung ist der Druck p eine skalarwertige Funktion der Raumkoordinaten. Der Eigenwert ω^2 ist eine skalare Größe, aus der unmittelbar die Eigenfrequenz

folgt. Die Divergenz des Gradientenfeldes von p bezeichnet eine skalarwertige Funktion, abhängig von den Raumkoordinaten im Berechnungsgebiet. In dieser Schreibweise wird die zweifache Ortsableitung der Druckfunktion dargestellt durch einen Gradienten und den darauf angewandten Divergenzoperator. Dies erleichtert die weitere Betrachtung zur geeigneten Wahl der Randbedingungen für das Problem. Nach dem aus der Vektoranalysis bekannten Satz von GAUSS mit den zugehörigen Voraussetzungen an die Funktionen entspricht das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes gerade dem Integral des Flusses des Feldes in Normalenrichtung über die Grenze des betrachteten Gebietes. Mathematisch bedeutet dies, dass sich ein Volumenintegral auf ein Oberflächenintegral reduzieren lässt. Kann der Fluss des Vektorfeldes durch die Oberflächen des Berechnungsgebietes bestimmt werden, so folgt daraus die zur FE-Berechnung der Druckfunktion notwendige Randbedingung.

Die HELMHOLTZ-Gleichung kann direkt mit dem FE-Programm FEMLAB in einem Geometriemodell der Kavität gelöst werden. Da der Koeffizient a^2 als Quadrat der Schallgeschwindigkeit für Umgebungstemperatur einen konstanten Wert hat, resultieren unterschiedliche Eigenformen der Druckfelder bei gleicher Knotenzahl nur aus unterschiedlichen Randbedingungen. Zur Modellierung der Randbedingungen kann die Geometrie der Kavität in drei Bereiche unterteilt werden. Den flächenmäßig größten Bereich bildet die Strukturoberfläche. Diese besteht aus einer als schallhart, also ideal schallreflektierend angenommenen Stahloberfläche. Die vollständige Schallreflektion an der Stahloberfläche kann durch einen verschwindenden Fluss des Schallfeldes durch die betreffenden Oberflächen beschrieben werden. Die entsprechende Randbedingung wird als NEUMANN-Randbedingung ([FEM00], [SCH99]) bezeichnet und lässt sich durch die Gleichung

$$\vec{n} \cdot (a^2 \nabla p) = 0 \quad (5.16)$$

für alle Stahloberflächen des Geometriemodells realisieren. Dabei wird der nach außen zeigende flächennormale Einheitsvektor mit \vec{n} bezeichnet. Für das gesamte Geometriemodell des Berechnungsgebietes verbleiben lediglich an den Stirnseiten die beiden durchströmten Oberflächen, für die andere Randbedingungen gefunden werden müssen. Für die Grenzfläche zwischen dem axialen Strömungsgitter und dem Schalldämpfer wird angenommen, dass durch die Aufweitung des anschließenden Strömungskanals und die schalldämmende Wirkung des Dämpfers an dieser Position ein Druckknoten entsteht. Im Vergleich zu den beträchtlichen Schalldruckpegeln in der Kavität, muss von einer Reduktion der Druckamplituden um mehrere Größenordnungen durch den Schalldämpfer ausgegangen werden. Die entsprechende Randbedingung wird als DIRICHLET-Randbedingung bezeichnet und durch die einfache Gleichung $p = 0$ für die Grenzfläche beschrieben.

Nur an der Grenzfläche zwischen Kavität und Dichtspalt kann in Abhängigkeit von den Versuchsparametern durch unterschiedliche Randbedingungen die berechnete Eigenform beeinflusst werden. Dabei wird im Modell nicht zwischen der sehr schmalen Spaltfläche und dem Rest der verbleibenden Stirnfläche von der Höhe des Dichtstreifens unterschieden. Für die gesamte Stirnfläche wird eine gemischte bzw. NEUMANN-Randbedingung

in der Form

$$\vec{n} \cdot (a^2 \nabla p) = -qp \quad (5.17)$$

gewählt. In dieser Formulierung wird durch \vec{n} der nach außen zeigende Normalenvektor der Grenzfläche bezeichnet, in dessen Richtung der Fluss des Vektorfeldes durch die Randbedingung bestimmt wird. Durch den Koeffizienten q wird ein Verhältnis zwischen dem Druckgradienten und dem Druckwert der Lösungsfunktion hergestellt. Aus diesem Verhältnis resultieren die gemessenen Druckeigenformen mit Knotenlinien in axialer Richtung. An den Knotenpunkten der Grenzfläche ist der veränderliche Störanteil des Druckes null, so dass auch der Druckgradient verschwindet.

Es konnte für diese einfache Modellierung der Druckmoden durch die HELMHOLTZ-Gleichung kein Verfahren gefunden werden, das eine quantitative Bestimmung des Koeffizienten q erlaubt. Auch die aus den Messungen bekannten Unterschiede der axialen Druckverläufe in Abhängigkeit von den Versuchsparametern können mit dem beschriebenen Modell nicht nachvollzogen werden. Bei der Herleitung der Wellengleichung werden offensichtlich Vereinfachungen durchgeführt, die den physikalischen Eigenschaften der Druckfelder in der Kavität nicht entsprechen.

5.1.2 Erweiterung der akustischen Wellengleichung

Eine verbesserte Modellierung der akustischen Druckmoden erfordert offensichtlich weniger starke Vereinfachungen und die Beibehaltung von Größen, die in der Wellengleichung vernachlässigt wurden. Um zu einem geeigneten Kompromiss zwischen den notwendigen Vereinfachungen und Linearisierungen der Gleichungen und einer bestmöglichen Abbildung der relevanten physikalischen Zusammenhänge in einem Modell der modalen Druckfelder zu gelangen, können mit Hilfe der Pegelrechnung aus den vorliegenden Messdaten die Größen des Druckfeldes quantifiziert und hinsichtlich der Notwendigkeit zur Berücksichtigung im Modell bewertet werden.

Typische Werte der gemessenen Druckamplituden in der Kavität liegen zwischen 0.2 bar und 0.35 bar . In einzelnen Messungen wurden Amplitudenwerte von nahezu 0.5 bar gemessen. Druckamplituden dieser Größe führen zu Schwingungen der Fluidteilchen, deren Weg- und Geschwindigkeitsamplituden nicht mehr vernachlässigbar sind. Berechnet man die in der Akustik geläufigen logarithmischen Pegel für den Schalldruck dieser Schwingungen, so entspricht ein Amplitudenwert von 0.2 bar einem Schalldruckpegel von 180 dB . Diese Werte übersteigen die in der Maschinenakustik und der physiologischen Akustik gängigen Amplituden um ein Vielfaches. Aus dem bekannten Druckpegel kann die Schnelle im Druckfeld berechnet werden. KOLLMANN [KOL93] gibt die notwendigen Bezugswerte zur Berechnung der logarithmischen Pegel an. Sie betragen für den Schalldruck $2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ und für die Schnelle $5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$. Die in den entsprechenden DIN-Normen festgelegten Bezugswerte sind so gewählt, dass sämtliche Feldgrößen und die daraus abgeleiteten Leistungsgrößen (Produkte aus Feldgrößen) im akustischen Feld aus einem bekannten Pegel berechnet werden können. Die Frequenzabhängigkeit der Pegel führt nicht zu Berechnungsfehlern, da die modalen Schwingungen stets bei einer

diskreten Frequenz erfolgen. Der zu einem Druckpegel von 180 *dB* gehörende Wert der Schnelle beträgt 80 *m/s*. Den oben genannten typischen Werten der gemessenen Druckamplitude entsprechen damit Schnellewerte zwischen 80 *m/s* und 140 *m/s*. Dies sind auch typische Werte der Strömungsgeschwindigkeiten im Dichtspalt, so dass hieraus der Ansatz einer Anregung der Druck- bzw. Schnelleschwingung in der Kavität aus der Änderung der Strömungsgeschwindigkeit im Dichtspalt resultiert. Wenn die aus der Schnelle resultierende Wegstrecke der Fluidteilchen durch das Integral

$$\int \hat{v} \cos(\omega t) dt = \frac{\hat{v}}{\omega} \sin(\omega t) \quad (5.18)$$

mit der Integrationskonstante Null gegeben ist, so resultieren für die häufig auftretenden Druckmoden der Knotenzahl zwei bei einer Frequenz von ca. 900 *Hz* Wegamplituden zwischen 14 *mm* und 25 *mm* als typische Werte. Damit sind die Wegamplituden der Fluidteilchen vergleichbar mit den Geometriemaßen des Labyrinths und der Kavität und können, ebenso wie die Geschwindigkeitsamplituden, nicht als kleine Größen bei der Herleitung der Eigenwertgleichung vernachlässigt werden. Insbesondere die bei KOLLMANN beschriebene Argumentation für die Vernachlässigung des konvektiven Terms in der EULER-Gleichung als Produkt zweier Wechselgrößen, ist im Falle der gemessenen Druckamplituden und der resultierenden Schnelle in der Kavität nicht mehr gültig. Bereits einfache Abschätzungen zeigen, dass das Produkt $(\nabla v) \cdot v$ von der gleichen Größenordnung ist wie der Koeffizient a^2 , also das Quadrat der adiabaten Schallgeschwindigkeit in der Wellengleichung.

Die folgende Modifikation der Wellengleichung und deren Eigenwertformulierung erhebt nicht den Anspruch auf mathematische Exaktheit. Das Vorgehen zur Bestimmung einer geeigneten Gleichung orientiert sich an den bereits beschriebenen Schritten zur Herleitung der akustischen Wellengleichung, wobei die Schwingungsamplituden der Teilchen im Druckfeld und die daraus resultierenden Schnellewerte in der Gleichung beibehalten werden sollen. Das Ziel dieser Vorgehensweise ist eine halbempirische Gleichung, mit deren Hilfe der Einfluss der Teilchenschwingung im Feld und der periodischen Strömungsänderung im Dichtspalt auf die axiale Gestalt der Druckfelder beschrieben werden kann.

Ausgangspunkt sind die EULER-Gleichung 5.1, die Kontinuitätsgleichung 5.2 und die linearisierte Adiabatangleichung 5.4 sowie die Definitionsgleichung 5.5 der adiabaten Schallgeschwindigkeit. Auf die Aufteilung der Feldgrößen in einen konstanten Ruheanteil und einen Wechselanteil wird verzichtet. Es soll also eine Gleichung bestimmt werden, die nur den Wechselanteil des Druckfeldes beschreibt. Die Berechnung der Zeitableitung der Kontinuitätsgleichung und die Anwendung des Divergenz-Operators auf die EULER-Gleichung wird analog zum oben beschriebenen Vorgehen durchgeführt. Aus der Anwendung des Divergenz-Operators auf die EULER-Gleichung folgt

$$\nabla \cdot \left[\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho (\nabla v) \cdot v \right] = -\nabla \cdot (\nabla p) = -\Delta p, \quad (5.19)$$

wobei bereits ausgenutzt wird, dass die aufeinanderfolgende Anwendung von Gradient und Divergenz durch den LAPLACE-Operator dargestellt werden kann. Weiterhin wird

für die folgende Rechnung von einer Identität der Vektoranalysis Gebrauch gemacht, die besagt, dass die Anwendung des Divergenz-Operators auf das Produkt aus einer skalarwertigen (hier: $\rho = \rho(x, y, z)$) und einer vektorwertigen Funktion bei Anwendung der Produktregel zum Skalarprodukt aus dem Gradienten dieser Skalarfunktion ($\nabla\rho$) und der Vektorfunktion führt. Ausmultiplizieren und Umstellen der Terme führt zu

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = - [\Delta p + ((\nabla v) \cdot v) \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot ((\nabla v) \cdot v)]. \quad (5.20)$$

Auch in der Kontinuitätsgleichung werden nur die Wechselgrößen ρ und v und deren Produkte berücksichtigt. Die Gleichung hat nach Ausmultiplizieren des Divergenzterms die Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot v = 0. \quad (5.21)$$

Wird von dieser Gleichung die Zeitableitung gebildet und werden die entstehenden Terme entsprechend umgestellt, so folgt die Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = - \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + v \cdot (\nabla \frac{\partial \rho}{\partial t}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} (\nabla \cdot v) \right]. \quad (5.22)$$

Ein Vergleich der linken Seiten bei den Gleichungen 5.20 und 5.22 zeigt, dass man die beiden rechten Seiten gleichsetzen kann. Die zuvor ausmultiplizierten Divergenzoperatoren werden in beiden Gleichungen wieder zusammengefasst. Die Dichte kann mit dem aus den Gleichungen 5.4 und 5.5 resultierenden Zusammenhang $p = \rho a^2$ in den entsprechenden Druck umgerechnet werden. Es folgt daraus die Gleichung

$$\nabla \cdot (\nabla p) + \nabla \cdot \left(\frac{p}{a^2} (\nabla v) \cdot v \right) = \frac{\partial^2 p}{a^2 \partial t^2} + \nabla \cdot \left(\frac{v \partial p}{a^2 \partial t} \right), \quad (5.23)$$

in der nun mit einem harmonischen Ansatz entsprechend 5.13 für die Druckschwingung die Ableitung nach der Zeit ausgeführt wird. Dann werden die resultierenden Terme erneut umgestellt bzw. zusammengefasst und schließlich die gesamte Gleichung mit $-a^2$ multipliziert, was zur folgenden Gleichung

$$-\nabla \cdot [a^2 \nabla p + ((\nabla v) \cdot v - \omega^* v_s) p] = \omega^2 p \quad (5.24)$$

führt. Diese Darstellung der Gleichung entspricht der in dem FE-Programm FEM-LAB vorgegebenen Schreibweise für eine allgemeine Eigenwertgleichung. In dieser Gleichung ist die aus der Zeitableitung des Druckes resultierende Kreisfrequenz ω^* mit der Strömungsgeschwindigkeit im Dichtspalt v_s zu einer zeitabhängigen Beschleunigung zusammengezogen. Der gesamte Koeffizient der Druckfunktion besteht damit aus der konvektiven und lokalen Beschleunigung. Zu unterscheiden ist zwischen ω^* , der Kreisfrequenz, die aus der gemessenen Frequenz des Systems resultiert und ω^2 , das dem gesuchten Eigenwert entspricht. Daher kann bei der Modellierung des Druckfeldes die bekannte Frequenz des gekoppelten Systems zur Bestimmung der lokalen Beschleunigung genutzt und der Koeffizient als konstant betrachtet werden. Damit können beide Beschleunigungen des Druck-Koeffizienten als konstante Werte behandelt werden. Die aus der periodischen Spaltströmung resultierende lokale Teilchenbeschleunigung regt die Schwingung

der Fluidteilchen im Resonanzraum der Kavität an und beeinflusst die Eigenform des Druckfeldes. Wegen der großen Geschwindigkeiten und Weglängen der Teilchenschwingung im Druckfeld, gelingt erst durch die Berücksichtigung der Teilchenbeschleunigungen im Druck-Koeffizienten die genaue Berechnung der Druckeigenformen mit der erweiterten HELMHOLTZ-Gleichung als geeignetem Berechnungsmodell.

5.1.3 Quantitative Bestimmung der Koeffizienten der erweiterten Eigenwertgleichung

Der Koeffizient a^2 des Druckgradienten in Gleichung 5.24 entspricht dem Quadrat der adiabaten Schallgeschwindigkeit und kann aus der individuellen Gaskonstanten R des Mediums und dessen thermodynamischer Temperatur T sowie dem Adiabatenexponenten κ berechnet werden. Für Luft bei Raumtemperatur als Betriebsmedium im Prüfstand wird in allen FE-Berechnungen der Wert $a = \sqrt{\kappa R T} = 340 \text{ m/s}$ für die adiabate Schallgeschwindigkeit verwendet.

Der aus den beiden Beschleunigungsformen im Druckfeld bestehende Koeffizient der erweiterten Eigenwertgleichung hat einen grundlegenden Einfluss auf die Eigenform, als die Randbedingung an der Grenzfläche zum Dichtspalt. Im Falle der konvektiven Beschleunigung ist die ortsabhängige Geschwindigkeitsänderung, die die Teilchen im Druckfeld während eines festen Zeitpunktes erfahren, abhängig von der lokalen Geschwindigkeit im Feld. Da die Differentialgleichung 5.24 mit konstanten Koeffizienten gelöst wird, kann aus der gemessenen Druckamplitude mittels Pegelrechnung die Schnelle bestimmt werden. Zur Berechnung des Amplitudenwertes der konvektiven Beschleunigung wird also die Schwingung eines einzelnen Fluidteilchens im Feld betrachtet. Ist der maximale Wert der Schnelle im Druckfeld bekannt, so kann für das Fluidteilchen entlang des Weges der Hin- und Rückbewegung im Verlaufe einer vollständigen Schwingungsperiode durch den Ansatz

$$v(s) = \hat{v} \sin(k \cdot s), \quad k = \frac{2\pi}{4\hat{s}} \quad (5.25)$$

der wegabhängige Geschwindigkeitsverlauf bestimmt werden, wobei k die Wellenzahl, s die Wegkoordinate und \hat{s} der Amplitudenwert der Auslenkung des Fluidteilchens bezeichnet. Die Wellenzahl wird bei einer räumlichen Schwingung analog zur Kreisfrequenz einer zeitabhängigen Schwingung benutzt. Die Wegamplitude der Teilchenschwingung resultiert gemäß Gleichung 5.18 aus dem Integral der Schnelle des Teilchens. Einsetzen der Wellenzahl als Funktion von Schnelle \hat{v} und Frequenz f des gekoppelten Systems führt zum folgenden Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$v(s) = \hat{v} \sin\left(\frac{\pi^2 f}{\hat{v}} s\right) \quad (5.26)$$

und damit zu folgender Ableitung der Teilchengeschwindigkeit nach dem Weg

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\pi^2 f}{\hat{v}} \hat{v} \cos\left(\frac{\pi^2 f}{\hat{v}} s\right). \quad (5.27)$$

Die konvektive Beschleunigung eines Fluidteilchens entlang des Druckgradienten, dessen Richtung gleich der Wegkoordinate s angenommen wird, kann daher durch den Ausdruck

$$v \frac{dv}{ds} = \pi^2 f \hat{v} \sin(ks) \cos(ks) = \frac{\pi^2 f}{2} \hat{v} \sin(2ks) \quad (5.28)$$

beschrieben werden. Es wird dabei ein bekanntes Additionstheorem zur Vereinfachung des Produktes aus den beiden trigonometrischen Funktionen ausgenutzt. Aus der Anwendung des Additionstheorems resultiert, dass die Wellenlänge der konvektiven Beschleunigung den halben Wert von Geschwindigkeit und Weg hat. Im Verlauf einer Druck-Halbschwingung existiert jeweils ein Bereich mit positiver und negativer konvektiver Beschleunigung.

Die lokale Beschleunigung resultiert aus der Geschwindigkeitsänderung der Fluidströmung im Dichtspalt. Diese Geschwindigkeitsänderung und die damit verbundene Druckänderung wirken als Schwingungsanregung auf die Fluidteilchen in der Kavität. Die Intensität dieser Geschwindigkeitsänderung wird jedoch mit zunehmender Entfernung vom Spalt geringer, was im Modell der Druckmoden als quadratische Abnahme der Beschleunigung in axialer Richtung durch die Funktion

$$\omega v_s(z) = \omega \hat{v}_s \left(\frac{z}{z_{max}} \right)^2 \quad (5.29)$$

berücksichtigt wird.

Die periodische Geschwindigkeitsänderung der Fluidströmung im Dichtspalt erfolgt um einen Mittelwert, der deutlich von Null verschieden ist. Da im Dichtspalt keine Messungen durchgeführt werden konnten, müssen die Fluidgeschwindigkeiten durch Strömungsberechnungen ermittelt werden. Bei der überwiegenden Zahl von Messungen folgen die Druckverläufe den Strukturschwingungen entweder gleich- oder gegenphasig mit vernachlässigbaren Abweichungen. Dies führt zu der Annahme, dass die Strömung ohne zeitliche Verzögerung infolge von Trägheitseffekten der Strukturbewegung folgt und die Strömungsgeschwindigkeit bei maximalem und minimalem Spaltspiel durch stationäre Strömungsrechnungen bestimmt werden kann. Die Berechnung der lokalen Beschleunigung aus den Strömungsgeschwindigkeiten im Spalt beruht auf der Überlegung, dass die für das Modell der Druckfelder relevanten Größen weniger in den Strömungsgeschwindigkeiten und ihren Änderungen um einen beliebigen Mittelwert, sondern vielmehr im Amplitudenwert der kinetischen Energie dieser Geschwindigkeitsänderungen zu suchen sind. Aus den berechneten Strömungsgeschwindigkeiten bei maximaler und minimaler Dichtspalthöhe, wird eine energiegleiche Geschwindigkeitsamplitude um den Mittelwert Null berechnet. Es gilt für eine spezifische, auf die Fluidmasse bezogene Änderung der gesamten kinetischen Energie

$$\Delta E_{kin}/m = \Delta e = \frac{1}{2} ((v_{smax})^2 - (v_{smin})^2), \quad (5.30)$$

also für die Amplitudenwerte

$$\hat{e} = \frac{1}{2} \cdot \Delta e = \frac{\hat{v}_s^2}{2} \quad (5.31)$$

und für die resultierende Geschwindigkeitsamplitude

$$\hat{v}_s = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot ((v_{s_{max}})^2 - (v_{s_{min}})^2)}. \quad (5.32)$$

Eine Geschwindigkeit dieser Amplitude führt bei einer Schwingung der Dichtungsstrukturen mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ zu einer lokalen Beschleunigung von

$$a_s = \frac{d}{dt} \hat{v}_s \sin(\omega t) = 2\pi f \hat{v}_s \cos(\omega t). \quad (5.33)$$

Der Vergleich der Amplitudenwerte von lokaler und konvektiver Beschleunigung zeigt, dass bei gleicher Frequenz und Geschwindigkeitsamplitude der Koeffizient der konvektiven Beschleunigung mit dem Wert $\pi^2/2 = 4.935$ stets kleiner ist, als der Koeffizient der lokalen Beschleunigung mit dem Wert $2\pi = 6.283$. Weiterhin ist zu berücksichtigen, dass die Schnelle \hat{v} der Fluidteilchen im Druckfeld im Allgemeinen nicht mit dem Amplitudenwert der Geschwindigkeitsänderung im Dichtspalt \hat{v}_s übereinstimmt. Die Ergebnisse der Messungen zeigen vielmehr, dass die Schnelle im Druckfeld den Wert der Strömungsgeschwindigkeit oft deutlich übersteigt. Die beiden Beschleunigungen im konvektiven Koeffizienten der Differentialgleichung haben unterschiedliche Ursachen und können in den Messungen durch Versuchsparameter beeinflusst werden. Bei der steifen Strukturkombination mit niederdruckseitiger Kavität ist es möglich, die Druckdifferenz in einem weiten Bereich zu variieren. Dadurch kann die Amplitude der Strömungsgeschwindigkeit im Spalt im Verhältnis zur Schnelleamplitude im Druckfeld in einem weiten Bereich variiert werden. Bei großen Druckdifferenzen steigt die Änderung der Strömungsgeschwindigkeit im Spalt so weit an, dass der Koeffizient das Vorzeichen wechselt, was zu einer Umkehr des Druckgradienten an der Dichtspaltseite der Kavität führt. Dieser Effekt wurde in Messungen beobachtet und kann mit dem hier beschriebenen Modell sehr gut nachvollzogen werden.

Abschließend soll die quantitative Bestimmung der beiden Beschleunigungen am Beispiel der steifen Strukturkombination Rotor100/Stator88 beschrieben werden. Für den konvektiven Koeffizienten der PDG wird gemäß der Einleitung zu Kapitel 5.1.2 die Schnelle der Fluidteilchen mittels Pegelrechnung aus den gemessenen Druckamplituden bestimmt. Für die bei hochdruckseitiger Kavität und 6.9 bar Einstromdruck typische Amplitude des Druckfeldes von 0.3 bar resultiert ein Schnellewert von 75 m/s. Nach Gleichung 5.28 resultiert aus diesem Schnellewert eine konvektive Beschleunigung von $3.33 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$ bei einer Frequenz von 900 Hz. Typische berechnete Strömungsgeschwindigkeiten im Dichtspalt liegen für diese Messungen zwischen 70 m/s und 90 m/s. Die gemäß Gleichung 5.32 berechnete energiegleiche Geschwindigkeitsamplitude um die Ruhelage der Teilchen beträgt 40 m/s. Daraus resultiert eine lokale Beschleunigung am Dichtspalt nach Gleichung 5.33 von $2.26 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$. Dieser Wert nimmt gemäß Gleichung 5.29 in der Kavität sehr schnell ab, so dass im Bereich des Flansches nahezu ausschließlich die konvektive Beschleunigung der Teilchenschwingung Einfluss auf die Lösung der PDG hat. Der große Zahlenwert der konvektiven Beschleunigung führt so zu den gemessenen Drucküberhöhungen in der Mitte der Kavität. Ein

Vergleich zwischen berechneter und gemessenen Druckeigenformen ist in Abbildung 5.5 dargestellt.

Bei niederdruckseitiger Kavität und 6.9 *bar* Einstromdruck konnte die Druckdifferenz in einem Bereich zwischen 2.6 *bar* bei 934 *Hz* und 3.8 *bar* bei 972 *Hz* ohne Anstreifen der Dichtungen variiert werden. Der beobachtete Phasensprung bei niederdruckseitiger Kavität führt zu einem negativen Vorzeichen des konvektiven Koeffizienten. Bei kleinen Druckverhältnissen zeigen die Druckeigenformen zunächst einen flach abfallenden Verlauf, der mit zunehmendem Abstand vom Dichtspalt stetig steiler wird. Vergleiche von berechneten Druckverläufen in der Kavität und Messergebnissen sind in den Abbildungen 5.10 und 5.11 dargestellt. Die Erhöhung der Druckdifferenz führt zu einer Vorzeichenumkehr des Druckgradienten, der nun einen flachen Anstieg aufweist. In der Mitte der Kavität wird eine Druckamplitude erreicht, die einige Prozent größer ist, als diejenige am Dichtspalt. Bei diesen Messungen werden die Amplituden des Druckes in der Kavität und der Strukturschwingung mit anwachsender Druckdifferenz kleiner. Bei einer Druckdifferenz von 2.7 *bar* wird eine Druckamplitude von ca. 0.35 *bar* erreicht. Dies entspricht einem Druckpegel von ca. 185 *dB* und einem zugehörigen Wert der Schnelle von 87.5 *m/s*. Eine Druckdifferenz von 3.8 *bar* führt zu Druckamplituden in der Kavität von 0.2 *bar* und einer Schnelle von 50 *m/s*. Die zugehörigen konvektiven Beschleunigungen betragen ca. $4 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$ bzw. ca. $2.4 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$. Die berechneten Geschwindigkeiten im Dichtspalt variieren bei 2.7 *bar* Druckdifferenz und einer Strukturamplitude von ca. 0.1 *mm* zwischen 155 *m/s* und 180 *m/s*. Bei 3.8 *bar* Druckdifferenz verringert sich die Strukturamplitude auf ca. 0.05 *mm* und die Strömungsgeschwindigkeit variiert zwischen 265 *m/s* und 273 *m/s*. Berechnet man aus diesen Geschwindigkeiten die energiegleiche Geschwindigkeitsamplitude um die Ruhelage, so erhält man Werte von ca. 64.5 *m/s* und ca. 46 *m/s*. Die daraus resultierenden lokalen Beschleunigungen betragen $3.8 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$ und $2.8 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$. Die Werte von lokaler und konvektiver Beschleunigung sind in beiden Fällen vergleichbar groß und der resultierende Wert des Koeffizienten ist durch die unterschiedlichen Vorzeichen am Dichtspalt sehr klein. Die Druckfelder weisen im Bereich des Dichtspalts daher einen flachen Verlauf mit nahezu verschwindendem Druckgradienten auf. Bei einer Druckdifferenz von 2.7 *bar* ist die lokale Beschleunigung stets kleiner als die konvektive Beschleunigung, so dass der Druckverlauf zunächst schwach, dann immer stärker abfällt. Bei der größeren Druckdifferenz von 3.8 *bar* ist die lokale Beschleunigung am Spalt dagegen zunächst größer als die konvektive Beschleunigung. Da die aus der Spaltströmung resultierende lokale Beschleunigung rasch abklingt, folgt in beiden Fällen eine rasche Verminderung der Druckamplitude ab der Mitte der Kavität bis zum schalldämpferseitigen Rand.

Neben der betragsmäßigen Bestimmung der Beschleunigungen, aus denen der Koeffizient des Druckgradienten zusammengesetzt ist, entscheidet die Wahl des Vorzeichens über die Richtigkeit der Modellierung der Druckeigenformen. Die durch sämtliche Messungen bestätigte Phasenumkehr um 180° zwischen Struktur- und Druckschwingung der HD- und ND-Felder resultiert im mathematischen Modell aus dem Vorzeichen der konvektiven Beschleunigung. Physikalisch ist sie durch die hoch- oder niederdruckseitige Lage der Kavität und den Massestrom durch die variable Spalthöhe erklärbar. Die lokale Umkehr

des Vorzeichens im Bereich des Dichtspaltes stellt keine grundlegende Änderung dar, da die lokale Beschleunigung der Strömung in der Kavität rasch abklingt.

5.1.4 Bestimmung der Randbedingungen

Für die stirnseitige Grenzfläche der Kavität zum Schalldämpfer wird ein Druckknoten vorgegeben, an dem die berechnete Druckeigenform den Wert Null annimmt. Die Strukturoberflächen werden als ideal schallhart und reflektierend modelliert, indem der Fluss des Feldes in Richtung der nach außen zeigenden Flächennormalen zu Null gesetzt wird. Die Randbedingung an der Grenzfläche zwischen Kavität und Dichtspalt resultiert aus der Anwendung des GAUSS'schen Satzes auf die erweiterte Form der Wellengleichung. Mit Hilfe der Messdaten und der Strömungsberechnungen sollen die Koeffizienten an der Grenzfläche quantitativ abgeschätzt werden. Damit kann der Fluss des Vektorfeldes senkrecht zur Grenzfläche des Gebietes am Dichtspalt berechnet werden. Die zu Gleichung 5.17 analoge Formulierung für die Randbedingung der erweiterten Wellengleichung lautet:

$$\vec{n} \cdot [a^2 \nabla p + ((\nabla v) \cdot v - \omega^* v_s) p] = -qp \quad (5.34)$$

Durch den Koeffizienten q kann in Abhängigkeit vom lokalen Druck der Fluss des Vektorfeldes durch die Grenzflächen des Berechnungsgebietes in Normalenrichtung vorgegeben werden. Zunächst wird die Differentialgleichung 5.34 durch den Druck p dividiert und in eine algebraische Gleichung für die axiale Richtung umgeschrieben. Das gesamte Vektorfeld kann nach der Division durch den Druck in der folgenden Form geschrieben werden:

$$a^2 \frac{\nabla p}{p} + (\nabla v) \cdot v - \omega^* v_s = -q^* \quad (5.35)$$

Wegen der Vernachlässigung des flächennormalen Einheitsvektors samt der zugehörigen Längeneinheit, wird der Koeffizient q mit einem Sternsymbol markiert, um die Unstimmigkeit der physikalischen Einheiten in diesem Zwischenschritt anzudeuten. Nach dem Ersetzen der Ableitungen durch Differenzenquotienten bzw. dem Einfügen des Ausdrucks aus Gleichung 5.28 für die konvektive Beschleunigung folgt die algebraische Gleichung

$$a^2 \frac{\Delta p}{\hat{p} \Delta s} + \frac{\pi^2}{2} f \hat{v} - \omega^* \hat{v}_s = -q^*. \quad (5.36)$$

Die Abschätzung der Zahlenwerte erfolgt aus den Messdaten für die Amplitudenwerte der gemessenen Größen. Der Quotient $\Delta p/\hat{p}$ bezeichnet die relative Druckänderung auf einer bestimmten Wegstrecke. Bei einem Hochdruckfeld mit einer (in axialer Richtung negativen) Druckänderung von 10 % des Amplitudenwertes auf einem Weg von 50 mm kann beispielsweise der gesamte Quotient im ersten Term durch den Wert $-2/m$ ersetzt werden. Aus der gemessenen Frequenz der Schwingung, den berechneten Werten der Schnelle und der Amplitude der Strömungsgeschwindigkeit können die beiden Beschleunigungen zahlenwertmäßig bestimmt werden. Von dem gesamten Ausdruck werden nur die Anteile in axialer Richtung berücksichtigt. Eine Integration der axialen Komponente des Vektorfeldes über die Umfangslänge ersetzt das Skalarprodukt mit dem

flächennormalen Einheitsvektor. Dabei trägt die lokale Beschleunigung am Dichtspalt vollständig zu dem Integralwert bei, da sie stets in axialer Richtung erfolgt. Die konvektive Beschleunigung im Druckfeld verläuft in Richtung des lokalen Druckgradienten, der stets in Richtung des stärksten Druckanstieges gerichtet ist und von der axialen Richtung erheblich abweichen kann. Bei allen Eigenformen, deren Druckmaximum an der Grenzfläche zwischen Dichtspalt und Kavität liegt, erfolgt die konvektive Beschleunigung der Fluidteilchen ausschließlich in Umfangsrichtung und leistet keinen Beitrag zur Berechnung der Randbedingung. Nach Gleichung 5.28 liegt an den Druckextrema (wegen der Halbierung der Wellenlänge gegenüber der Druckfunktion) stets ein Nulldurchgang der konvektiven Beschleunigung. Da die Druckamplitude am Dichtspalt auch bei HD-Eigenformen stets weniger als 20 % unterhalb des Maximums liegt, wird die resultierende konvektive Beschleunigung bei der Berechnung der Randbedingungen nicht berücksichtigt. Das Integral zur Berechnung des Koeffizienten q in der Randbedingung lautet damit

$$\frac{1}{2} \oint_{S_D} \left| -a^2 \frac{\Delta p}{\hat{p} \Delta s} \sin(ks) - \omega^* \hat{v}_s \sin(ks) \right| ds = q, \quad k = \frac{2\pi}{S_D}. \quad (5.37)$$

Die Umfangslänge der Dichtung wird hier mit S_D bezeichnet. Durch Integration dieser Gleichung erhält man eine geeignete Abschätzung des Flusses durch die Grenzfläche. Für den Integralwert ist es ohne Bedeutung, ob die Sinus- und Cosinusfunktionen mit kleiner Wellenlänge mehrmals über die Umfangslänge aufsummiert werden, oder ob Grundschwingungen angenommen werden, die nur einmal entlang des Strukturumfanges auftreten. Da auch bei der Berechnung der Randbedingungen nur die Amplitudenwerte des Flusses relevant sind, wird jeweils über die positiven Anteile der Halbwellen integriert bzw. über den Betrag der gesamten Funktionen integriert und dieser Integralwert anschließend halbiert. Da der erste Term des Integranden Informationen über den Druckgradienten und die Druckamplitude an der Grenzfläche der Kavität erfordert, ist auch zur Bestimmung der Randbedingung die Kenntnis experimentell ermittelter Daten notwendig.

Die Auswertung des Integrals erfolgt mit den Zahlenwerten zur Bestimmung der PDG-Koeffizienten, wie dies bereits in Abschnitt 5.1.3 beschrieben wurde. Die Schnelle im Druckfeld wird durch Pegelrechnung aus der Druckamplitude in der Kavität bestimmt und die Strömungsgeschwindigkeit im Dichtspalt resultiert aus statistisch stationären Strömungsberechnungen. Sind Messwerte vorhanden, so können die Differenzenquotienten des ersten Terms im Integral geeignet abgeschätzt werden. Für die hochdruckseitige Position der Kavität wird am Beispiel der Zahlenwerte, die im zweitletzten Absatz von Abschnitt 5.1.3 berechnet wurden, der Koeffizient q in Gleichung 5.37 bestimmt. Führt man die Integration wie oben angegeben numerisch aus, so resultiert ein Zahlenwert von $q = 1.54 \cdot 10^5$ für den Koeffizienten. Zusammen mit dem positiven konvektiven Koeffizienten der PDG führt diese Randbedingung zu dem beobachteten Anstieg des Druckverlaufs in der Kavität (vgl. Abbildung 5.5).

Für die Beispiele mit niederdruckseitiger Kavität und Knotenzahl drei resultieren die Zahlenwerte zur Bestimmung von q aus den Berechnungsergebnissen, die im letzten Ab-

satz von Abschnitt 5.1.3 angegeben wurden. Der Wert des Koeffizienten q beträgt bei den Eingabegrößen für die Druckdifferenz von 2.7 *bar* $q = 9.63 \cdot 10^4$. Für die größeren Druckdifferenz von 3.8 *bar* liegt das Ergebnis der numerischen Integration bei $q = 1.15 \cdot 10^5$. In beiden Fällen resultiert aus den kleinen Druckgradienten und den relativ großen lokalen Beschleunigungen an der Grenzfläche der Kavität ein positiver Zahlenwert des Koeffizienten. Dieser führt zu einem zunächst leicht ansteigenden Verlauf der Eigenform. Das starke Abfallen des Druckverlaufs in einiger Entfernung vom Dichtspalt wird schließlich durch den negativen konvektiven Koeffizienten der PDG verursacht (vgl. Abbildungen 5.10 und 5.11).

Die Knotenzahl zwei der steifen Strukturkombination mit niederdruckseitiger Kavität gibt ein Beispiel für einen negativen Zahlenwert des Koeffizienten q . Die Druckdifferenz beträgt bei dieser Messung ca. 1.7 *bar* und die Frequenz der Schwingung liegt bei 685 *Hz*. Die berechneten Strömungsgeschwindigkeiten im Dichtspalt variieren zwischen 132 *m/s* und 151 *m/s*. Berechnet man die energiegleiche Geschwindigkeitsänderung um die Ruhelage nach Gleichung 5.32, so folgt ein Amplitudenwert von ca. 52 *m/s*, der zur Bestimmung der lokalen Beschleunigung im Dichtspalt in Gleichung 5.37 führt. Der Druckgradient am Dichtspalt ist positiv in *z*-Richtung; der Druck fällt also um ca. 10 % ab bis zum zweiten Messpunkt in der Kavität. Mit diesen Zahlenwerten folgt aus der Integration ein Wert von $q = -1.1 \cdot 10^4$. Da für dieses ND-Druckfeld sowohl der konvektive Koeffizient der PDG wie auch der Koeffizient q der Randbedingung negative Werte annehmen, zeigt das Druckfeld einen nahezu konstant abfallenden Verlauf in der Kavität (vgl. Abbildung 5.8).

5.1.5 Auswirkungen von Koeffizientenvariationen auf die Druckeigenform

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Auswirkungen des konvektiven Koeffizienten der Differentialgleichung 5.24 anhand von drei Beispielen dargestellt. Die berechneten Eigenformen für die Parameterstudien haben die Knotenzahl zwei und unterscheiden sich bezüglich der axialen Druckverläufe in der Kavität. In Abbildung 5.1 ist eine Druckeigenform dargestellt, wie sie in der hochdruckseitigen Kavität identifiziert und anhand der Messdaten mit der erweiterten HELMHOLTZ-Gleichung berechnet werden kann. Die dargestellte Geometrie der Kavität zeigt am unteren Ende die Elemente des Strömungsgitters, das ursprünglich zur Drallerzeugung vorgesehen war. An der unteren Stirnseite ist stets ein Druckknoten als Randbedingung vorgegeben, während an der oberen Stirnseite das Verhältnis zwischen dem Druckwert und dem Gradienten der Funktion mit einer NEUMANN-Randbedingung aus den Messdaten bestimmt wird. Die axiale Koordinate zeigt senkrecht nach oben. Die abgebildete HD-Eigenform weist daher an der oberen Stirnfläche bei positivem Druck einen negativen Druckgradienten in axialer Richtung auf.

Im axialen Verlauf der Druckeigenformen zeigen sich charakteristische Unterschiede, die hauptsächlich durch die Position der Kavität und die Druckparameter der Mes-

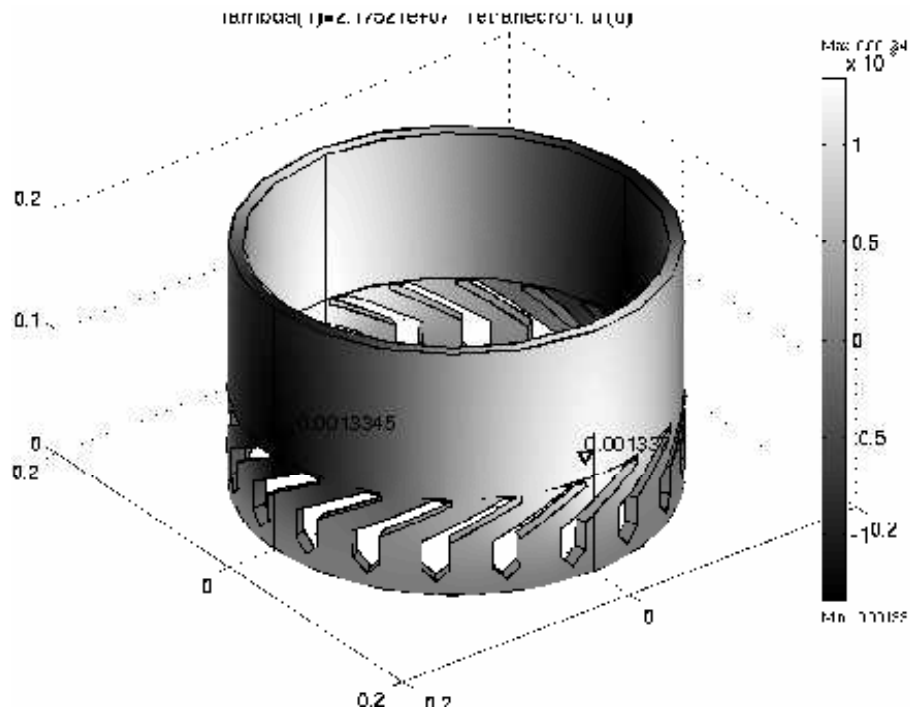


Abbildung 5.1: Berechnete Druckeigenform der Knotenzahl zwei in hochdruckseitiger Kavität

sungen bestimmt werden. Zur Darstellung des axialen Druckverlaufs wird in den folgenden Abbildungen ein Längsschnitt durch die Druckeigenform an der Position des Druckmaximums herangezogen. Die Druckeigenformen unterscheiden sich lediglich hinsichtlich zweier Berechnungsparameter. Für den konvektiven Koeffizienten der erweiterten HELMHOLTZ-Gleichung 5.24 sowie den frei wählbaren Koeffizienten in der NEUMANN-Randbedingung 5.34 werden Zahlenwerte eingesetzt, die nicht auf Messdaten beruhen. Es soll lediglich anhand von drei Beispielen die Änderung der berechneten Eigenform in Abhängigkeit von den Beträgen und Vorzeichen der beiden Koeffizienten dargestellt werden.

In den folgenden Abbildungen werden die berechneten Druckverläufe stets mit denselben Daten aus einer Messreihe mit hochdruckseitiger Kavität des Rotor80 bei ca. 4.2 bar Einstromdruck, Druckdifferenzen zwischen 0.6 bar und 0.9 bar und einer Frequenz des gekoppelten Systems von ca. 850 Hz dargestellt. Zur besseren Vergleichbarkeit der relativen Druckverläufe werden berechnete wie auch gemessene Eigenformen auf den Wert eins an der Position des Druckmesspunktes am Labyrinth normiert. Der Amplitudenanstieg vom Dichtspalt zur Mitte der Kavität beträgt ca. 10 %, wobei der tatsächliche Maximalwert des Druckes nicht genau bestimmt werden kann. Die zu einer Messung gehörenden Amplitudenwerte sind durch dünne Linien verbunden. Eine Skizze zeigt die Positionen der Druckmesspunkte in der Kavität. Das erste Beispiel in Abbildung 5.2 zeigt eine berechnete Eigenform, bei der für den konvektiven Koeffizienten ein Zahlenwert von $2.5 \cdot 10^5$ und für die Randbedingung die Zahl $q = 5 \cdot 10^4$ verwendet wurden. Die mit diesen Daten

berechnete Eigenform zeigt mit einer maximalen Amplitudenüberhöhung von ca. 12 % eine gute Übereinstimmung mit einer der Messungen. Die berechnete Eigenfrequenz des Druckfeldes beträgt 736 Hz .

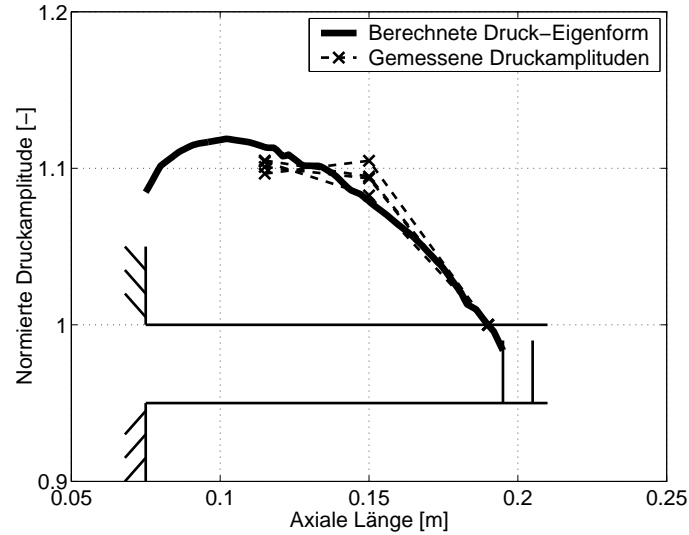


Abbildung 5.2: Vergleich zwischen gemessenen und berechneten Druckeigenformen mit einem Zahlenwert des konvektiven Koeffizienten von 250000 bei 736 Hz

Im folgenden Beispiel in Abbildung 5.3 bleibt der Koeffizient q der Randbedingung unverändert, der konvektive Koeffizient wird jedoch auf den Zahlenwert $5 \cdot 10^4$ vermindert. Die berechnete Eigenform zeigt nur noch eine Amplitudenüberhöhung von wenigen Prozent in der Kavität bei 745 Hz . Der Druckanstieg vom Spalt zum Druckmaximum verläuft entsprechend flacher und entspricht einer typischen Druckeigenform, die bei niederdruckseitiger Kavität und großen Druckdifferenzen gemessen wurde. Der Vergleich mit der Eigenform in Abbildung 5.2 zeigt, dass der Koeffizient der PDG einen wesentlich größeren Einfluss auf den axialen Druckverlauf hat, als der Koeffizient der Randbedingung.

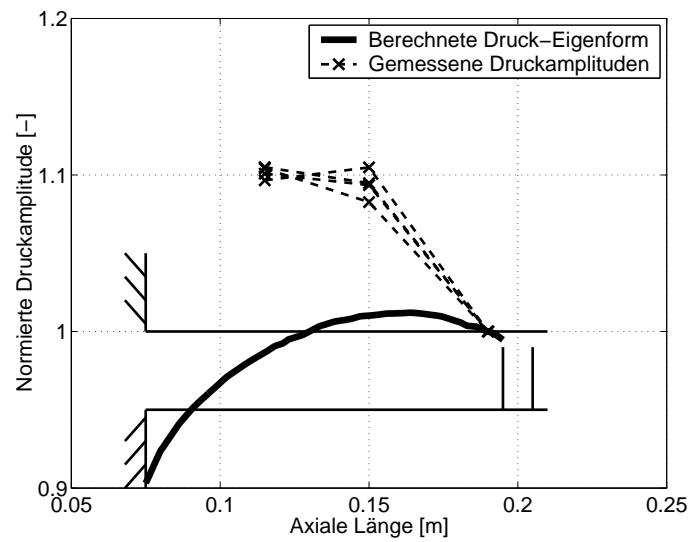


Abbildung 5.3: Vergleich zwischen gemessenen und berechneten Druckeigenformen mit einem Zahlenwert des konvektiven Koeffizienten von 50000 bei 745 Hz

Im letzten Beispiel in Abbildung 5.4 werden für beide Koeffizienten negative Zahlenwerte gewählt. Der konvektive Koeffizient verringert sich auf $-1 \cdot 10^5$ und der Koeffizient der Randbedingung wird mit $q = -5 \cdot 10^4$ gewählt. Der resultierende Druckverlauf zeigt eine nahezu konstante Verminderung der Druckamplitude vom Spalt in die Kavität hinein. Die maximale Druckamplitude wird also am Dichtspalt erreicht und es tritt kein Druckanstieg in der Kavität auf. Die berechnete Eigenfrequenz sinkt nur geringfügig auf 721 Hz ab. Druckeigenformen mit einem solchen Verlauf treten in den Messungen bei niederdruckseitiger Kavität mit relativ kleinen Druckdifferenzen auf.

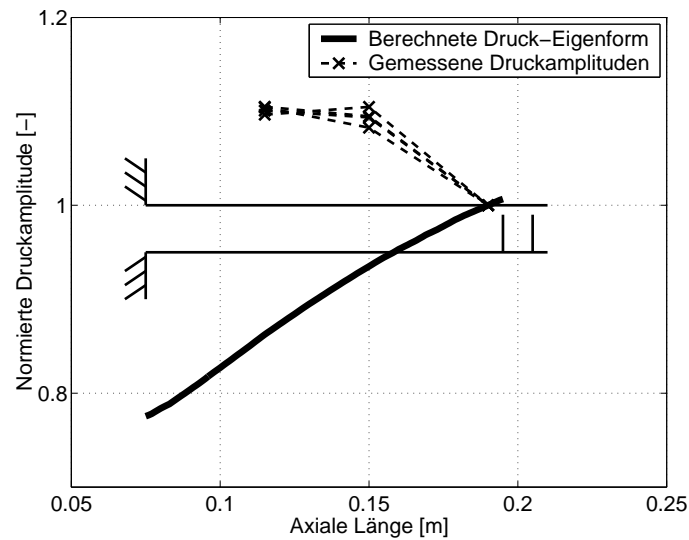


Abbildung 5.4: Vergleich zwischen gemessenen und berechneten Druckeigenformen mit einem Zahlenwert des konvektiven Koeffizienten von -100000 bei 721 Hz

5.2 Ergebnisse der Druckfeldberechnung

5.2.1 Kriterien für die Auswahl der Vergleichsmessungen

In diesem Abschnitt werden die axialen Druckverläufe von gemessenen Druckfeldern mit denen berechneter Druckfelder verglichen. Die Auswahl der Messungen orientiert sich an deren Qualität und Reproduzierbarkeit hinsichtlich der winkelgenauen Überlagerung der beiden orthogonalen Schwingungen zu einer umlaufenden Welle. Die Messungen mit dem steifen Stator88 weisen bei allen verwendeten Rotorvarianten gute bis sehr gute Qualität der Messungen auf und werden daher als Referenzmessungen zur Validierung der Berechnungsergebnisse herangezogen. Signifikante Unterschiede zwischen den Druckfeldern resultieren aus der Position der Kavität. Druckmoden mit der Knotenzahl zwei wurden in HD-seitiger und ND-seitiger Kavität gemessen und können mit den entsprechenden Berechnungen verglichen werden. Die charakteristischen axialen Druckverläufe resultieren aus dem Zusammenspiel von konvektiver Beschleunigung im Druckfeld und lokaler Beschleunigung der Teilchen an der Grenzfläche zwischen Kavität und Dichtspalt. Für die Knotenzahl drei existiert eine Messreihe mit ND-seitiger Kavität, in der die Druckdifferenzen in einem weiten Bereich variiert werden konnten. Aus der Variation der Druckdifferenz folgt eine deutliche Änderung des Druckgradienten im Bereich des Dichtspaltes, der in den Berechnungen ebenfalls nachvollzogen werden kann. Weiterhin führen Versuche mit weniger steifen Rotor-Strukturen zu Änderungen bei den Druckverläufen, die gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Druckfeldberechnungen aufweisen. Die quantitative Bestimmung der PDG-Koeffizienten und der Randbedingungen wurde in den Abschnitten 5.1.3 und 5.1.4 beschrieben.

5.2.2 Modelle der Druckfelder in hochdruckseitiger Kavität

Bei Druckfeldern in hochdruckseitiger Kavität führt die lokale Vergrößerung der Spalthöhe zu einem größeren Massenstrom aus der Kavität in den Spalt, was zu einem Druckabfall an dieser Stelle führt. Dagegen nimmt der Massenstrom an der Position der kleinsten Spalthöhe lokal ab und führt zu einem Druckanstieg an dieser Umfangsposition der Kavität. Dieser Zusammenhang führt zu der beobachteten Phase zwischen Druckfeld und Strukturschwingung, aus der wiederum das Vorzeichen des konvektiven Koeffizienten im Modell der Druckfelder resultiert.

Die folgende Tabelle 5.1 zeigt für den Stator88 die gemessenen Versuchsparameter für zwei verschiedene Rotorvarianten. Die Frequenzen des gekoppelten Systems unterscheiden sich nur um ca. 3 %. Es handelt sich in beiden Fällen um die Knotenzahl zwei. Nach Tabelle 4.1 liegen die gemessenen Systemfrequenzen zwischen der deutlich höheren Eigenfrequenz des Stators und den in beiden Fällen deutlich kleineren Eigenfrequenzen der Rotoren. Bei den hier aufgelisteten Daten handelt es sich um typische Werte aus Einzelmessungen mit guter Reproduzierbarkeit. Die Druckeigenform kann infolge winkelgenauer Überlagerung der Schwingungen eindeutig identifiziert werden.

VARIANTE	ROTOR100	ROTOR80
Frequenz	902 Hz	867 Hz
Druck, Einlass	6.9 bar	6.9 bar
Druck, Differenz	0.85 bar	1.1 bar
Druck, Amplitude	0.32 bar	0.3 bar
Rotor, Amplitude	0.04 mm	0.03 mm
Stator, Amplitude	0.09 mm	0.065 mm
Geschwindigkeit, Strömung, min	68 m/s	77 m/s
Geschwindigkeit, Strömung, max	82 m/s	95 m/s

Tabelle 5.1: Gemessene und berechnete Parameter der HD-Druckfelder, Knotenzahl zwei

Der Vergleich der berechneten Druckmoden mit den gemessenen Druckamplituden an den Sensorpositionen in der Kavität ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Die Verläufe sind normiert, um die Vergleichbarkeit zwischen einzelnen Messungen mit unterschiedlichen Amplituden zu ermöglichen. In der Abbildung wird eine Messreihe mit drei Einzelmessungen gezeigt, die nahezu identische Verläufe aufweisen. Die berechnete Druckeigenform unterschätzt die gemessenen Werte geringfügig. Die Messwerte an den drei axialen Sensorpositionen einer einzelnen Messung sind durch gestrichelte Linien verbunden.

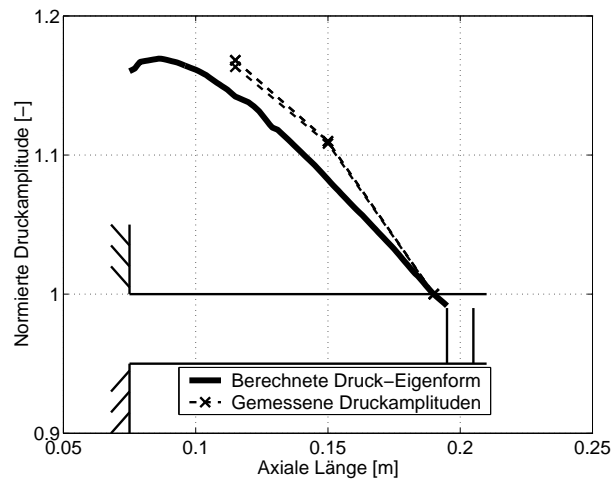


Abbildung 5.5: Vergleich der gemessenen und berechneten Druckeigenform bei der steifen Strukturkombination Rotor100/Stator88 und Einstromdrücken von ca. 7 bar

Da sich an der mittleren Sensorposition zwei Drucksensoren an unterschiedlichen Umfangspositionen befinden, wird der arithmetische Mittelwert aus beiden Amplituden gebildet. Bei Messungen mit winkelgenauer Überlagerung der Moden sind beide Werte nahezu gleich, während unterschiedliche Messwerte an den beiden Messpunkten darauf hindeuten, dass die Überlagerung der Moden nicht zu einer gleichmäßigen umlaufenden

Welle führt und daher diese Messdaten fehlerbehaftet sind. Deutlich sichtbare Abweichungen der Amplituden einzelner Messpunkte sind in der folgenden Abbildung 5.6 erkennbar. In der Abbildung ist die berechnete Eigenform mit einer größeren Anzahl von Messungen aus drei Messreihen mit Einlassdrücken von 3 bar, 5 bar und 7 bar dargestellt. Deutlich ist zu erkennen, dass auch stärkeres Variieren der Druckparameter zu ähnlichen normierten Druckverläufen führt. Die absoluten Amplituden zwischen Einzelmessungen können jedoch deutliche Unterschiede aufweisen.

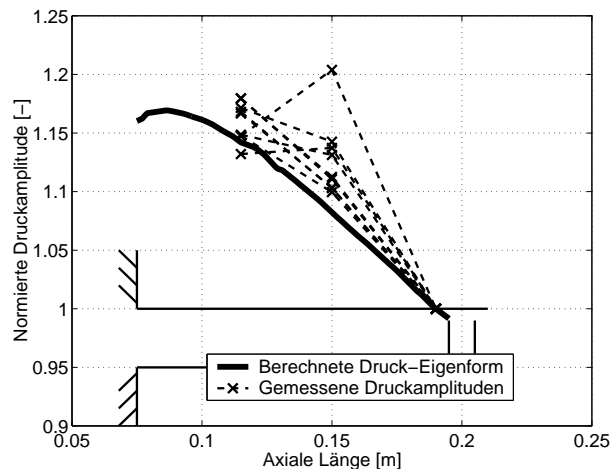


Abbildung 5.6: Vergleich der gemessenen und berechneten Druckeigenform bei der steifen Strukturkombination Rotor100/Stator88 und verschiedenen Einstromdrücken

Die Messungen mit dem etwas weniger steifen Rotor80 zeigen nahezu gleiche Verläufe wie beim steifen Rotor100. Von dieser Rotorvariante konnten Messungen mit 0,1 mm und mit 0,15 mm Spaltspiel durchgeführt werden. Mit der kleinen Spalthöhe konnten lediglich Messungen bei kleinen Druckdifferenzen und Schwingungsamplituden durchgeführt werden, die mit großen Streuungen der gemessenen Daten behaftet sind. Der in Abbildung 5.7 erkennbare Unterschied zum steifen Rotor mit gleichem Ruhespaltspiel beschränkt sich auf einen um ca. 4 % geringeren Druckanstieg in der Mitte der Kavität bei gleichem Absolutwert der Druckamplitude. Da nach Tabelle 5.1 die Strukturamplitude mit dem Rotor80 deutlich geringer ist, resultiert aus der höheren Koppelsteifigkeit und der niedrigeren Eigenfrequenz des Rotors in der Summe eine etwas geringere Frequenz des gekoppelten Systems. Die wesentlich bessere Übereinstimmung der gemessenen mit der berechneten Druckeigenform gegenüber den Ergebnissen in Bild 5.5 resultiert sehr wahrscheinlich aus der besseren Berechenbarkeit des Strömungsgeschwindigkeiten im Dichtspalt. Aus der höheren Druckdifferenz resultieren insgesamt höhere Strömungsgeschwindigkeiten und die Berechnung der Minimalgeschwindigkeit ist durch die größere verbleibende Spalthöhe wesentlich zuverlässiger.

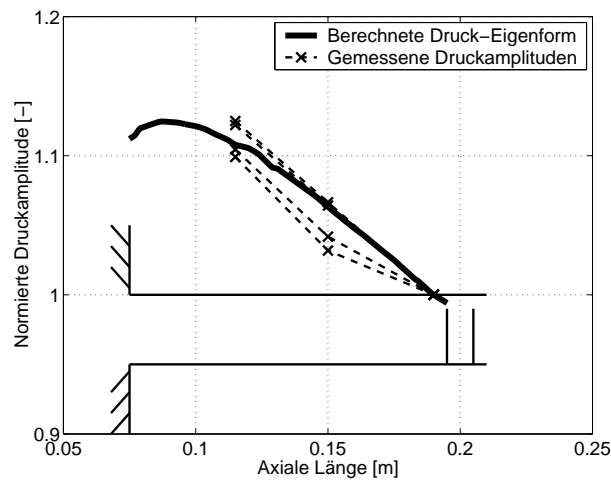


Abbildung 5.7: Vergleich der gemessenen und berechneten Druckeigenform bei der Strukturkombination Rotor80/Stator88 und 7 bar Einstromdruck

Die Messungen mit dem weichen Rotor14 werden wegen zu großer Streuung der Messwerte in diesem Abschnitt nicht dargestellt. Betrachtet man jedoch einzelne, zuverlässig erscheinende Messwerte, so werden Druckeigenformen gemessen, die eine Amplitude bis ca. 0.17 *bar* erreichen und einen weniger steilen Druckanstieg zur Mitte der Kavität aufweisen. Da auch die Summe der Strukturamplituden nur ca. 50 μm beträgt, resultiert dennoch eine beträchtliche Fluidsteifigkeit, die zu Frequenzen des gekoppelten Systems von ca. 900 *Hz* führt.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Gestalt der Druckeigenformen in den Berechnungen sehr gut mit den gemessenen axialen Druckverläufen übereinstimmt. Einen wesentlichen Anteil an der guten Übereinstimmung von Messung und Rechnung hat die Erweiterung der HELMHOLTZ-Gleichung 5.24 um den Koeffizienten aus lokaler und konvektiver Beschleunigung. Beide Beschleunigungsformen können aus den Messdaten bzw. aus einfachen Strömungsrechnungen ermittelt werden und beeinflussen die resultierende Druckeigenform entscheidend. Auch die quantitative Bestimmung der NEUMANN-Randbedingung mit Gleichung 5.37 trägt zu der guten Übereinstimmung zwischen Messung und FE-Berechnung bei

5.2.3 Modelle der Druckfelder in niederdruckseitiger Kavität

Bei Druckfeldern in niederdruckseitiger Kavität führt eine Erweiterung des Dichtspaltes zu einem vergrößerten Massestrom aus dem Labyrinth in die stromab liegende Kavität. Der Druck nimmt an der Position des größten Spaltspiels wegen des vergrößerten Zustroms aus dem Labyrinth lokal zu. Umgekehrt führt ein verengter Dichtspalt zu einem geringeren Massestrom in die stromab gelegene Kavität, was zu einer lokalen Druckabsenkung führt. Durch diese strömungsbedingte Umkehr der Zu- und Abflüsse in der niederdruckseitigen Kavität, gegenüber der hochdruckseitigen Kavität, ändert sich die

Phase zwischen Druck und Struktur um den gemessenen Winkel von 180° . Diese Phasenänderung führt zu einer negativen Koppelsteifigkeit bei niederdruckseitiger Kavität. Mit der negativen Koppelsteifigkeit ist eine deutliche Absenkung der Frequenz des gekoppelten Systems verbunden.

Die Schwingungsamplituden des Stators sind bei niederdruckseitiger Kavität und Knotenzahl zwei im Gegensatz zur hochdruckseitigen Kavität verschwindend gering. Die Daten dieser Schwingungsform sind in Tabelle 5.2 aufgelistet. Der Vergleich mit der in Tabelle 5.1 aufgeführten Schwingungsamplituden bei hochdruckseitiger Kavität deutet auf eine Verschiebung der Schwingung in die Nähe einer Tilgerfrequenz der Statorschwingung hin. Das auftreten dieser geringen Statoramplitude bei der niederdruckseitigen Knotenzahl zwei kann bei beiden Rotorvarianten beobachtet werden. Die Schwingfrequenz mit dem Rotor80 ist um mehr als 100 Hz bzw. ca. 15% gegenüber der Messung mit steifem Rotor100 abgesenkt. Sämtliche Messdaten zeigen eine prinzipielle Ähnlichkeit der Schwingungsformen beider Rotorvarianten. Im Gegensatz zu den Messungen mit hochdruckseitiger Lage der Kavität ist bei allen Druckeigenformen in der niederdruckseitigen Kavität eine Verminderung der Druckamplitude mit zunehmendem Abstand zum Dichtspalt zu beobachten. Aus der Tabelle ist auch zu ersehen, dass beim steifen Rotor100, trotz größerer Druckdifferenzen zwischen Ein- und Ausstromseite, deutlich kleinere Amplitudenwerte der Druck- und Strukturschwingung gemessen werden.

VARIANTE	ROTOR100 (1)	ROTOR100 (2)	ROTOR80
Frequenz	684 Hz	694 Hz	576 Hz
Druck, Einlass	6.9 bar	6.9 bar	6.9 bar
Druck, Differenz	1.7 bar	2.9 bar	1 bar
Druck, Amplitude	0.265 bar	0.28 bar	0.2 bar
Rotor, Amplitude	0.045 mm	0.05 mm	0.1 mm
Stator, Amplitude	0.01 mm	0.004 mm	0.001 mm
Geschwindigkeit, Strömung, min	132 m/s	197 m/s	88 m/s
Geschwindigkeit, Strömung, max	151 m/s	214 m/s	99 m/s

Tabelle 5.2: Gemessene und berechnete Parameter der ND-Druckfelder, Knotenzahl zwei

Die Eigenform der Knotenzahl zwei bei 684 Hz mit dem Rotor100 ist in Abbildung 5.8 zusammen mit gemessenen Druckverläufen dargestellt. Die normierten Druckamplituden dieser Eigenform zeigen eine nahezu linearen Abnahme um ca. 20% in der Kavität. Die beiden dargestellten Messungen sind die einzigen Messungen, die von der Knotenzahl zwei in der niederdruckseitigen Kavität vorliegen. Die winkelgenaue Schwingungsüberlagerung führt jedoch zu einer eindeutigen Identifikation der Eigenform, so dass diese beiden Messungen der größeren Zahl vorhandener Messungen mit dem Rotor80 vorgezogen werden.

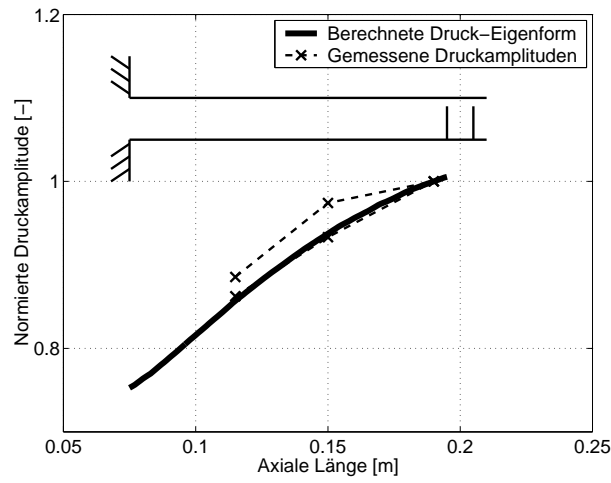


Abbildung 5.8: Vergleich der gemessenen und berechneten Niederdruck-Eigenform bei der Strukturkombination Rotor100/Stator88 und 7 bar Einstromdruck (Knotenzahl 2)

Die zweite gemessene Eigenform der Knotenzahl zwei bei 694 Hz des Rotor100 ist zusammen mit den Messungen in Abbildung 5.9 dargestellt. Im Unterschied zum vorhergehenden Bild verläuft die normierte Eigenform weniger stark abfallend. Vergleicht man die Daten in Tabelle 5.2 so führt die wesentlich größere Druckdifferenz von 2.9 bar zwar zu einem höheren Niveau der Strömungsgeschwindigkeit, die Druck- und Strukturamplituden sind jedoch nahezu unverändert. Dadurch wächst die lokale Beschleunigung am Dichtspalt an und führt zu dem deutlich kleineren Druckgradienten im Bereich des Dichtspaltes.

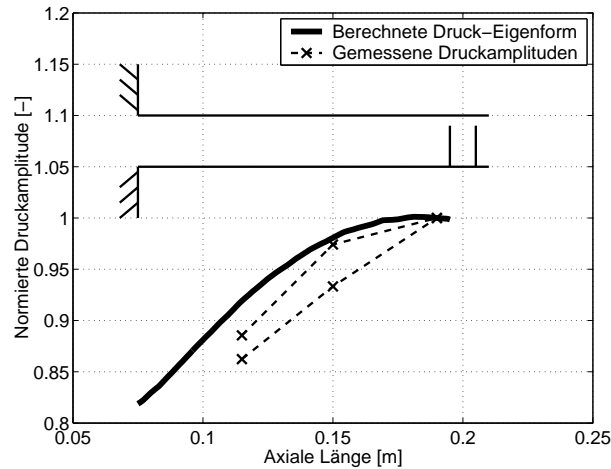


Abbildung 5.9: Vergleich der gemessenen und berechneten Niederdruck-Eigenform bei der Strukturkombination Rotor100/Stator88 und 7 bar Einstromdruck (Knotenzahl 2)

Auch bei der Knotenzahl drei mit niederdruckseitiger Kavität führt der Phasenwin-

kel zwischen Druck und Struktur zu einer negativen Koppelsteifigkeit und dadurch zu einer Frequenzabsenkung des gekoppelten Systems bis auf ca. 900 Hz . Auffallend ist der geringe Frequenzabstand zwischen den Messungen mit Rotor100 und Rotor80, der aus der Struktureigenfrequenz alleine nur schwer zu erklären ist. Die Frequenzen der Rotoren liegen nach Tabelle 4.1 mit 1128 Hz zu 889 Hz um ca. 25 % auseinander, während die Systemfrequenzen nur einen Abstand von ca. 3 % haben. Schätzt man die Koppelsteifigkeit aus dem Verhältnis von Druckamplitude und Strukturamplitude ab und berücksichtigt deren negatives Vorzeichen, so trägt offensichtlich die betragsmäßig größere negative Koppelsteifigkeit beim Rotor100 zu der beobachteten Frequenzabsenkung bei. Die Eigenfrequenz des Rotor80 ist nahezu identisch mit der Frequenz des gekoppelten Systems.

Bei den in Tabelle 5.3 aufgelisteten Messdaten ist zu erkennen, dass die Druckeigenformen der Knotenzahl drei nochmals größere Druckdifferenzen aufweisen, als die Druckmoden der Knotenzahl zwei. Die Verminderung der absoluten Druckamplitude bei größer werdender Druckdifferenz ist deutlich durch Messdaten belegt. Die Amplituden der Strukturschwingungen weisen bei der Knotenzahl drei mit steifem Rotor100 eine deutlich größere Amplitude des Stators auf. Bei der Messung mit dem weniger steifen Rotor80 dreht sich das Amplitudenverhältnis zwischen Rotor und Stator um und die Rotoramplitude ist deutlich größer als die Statoramplitude. Da diese Strukturkombination mit 892 Hz auch die niedrigste Systemfrequenz der drei Beispiele aufweist, kann in diesem Fall wiederum eine Schwingung in der Nähe einer Tilgungsfrequenz des Stators angenommen werden. Die ansteigende Druckdifferenz führt zu einer deutlichen Verminderung der absoluten Druckamplitude und zu einer kontinuierlichen Änderung der Eigenform mit anwachsendem Druckmaximum in der Kavität. Diese bereits bei der Knotenzahl zwei erkennbare Tendenz kann bei der Knotenzahl drei an einer größeren Zahl von Einzelmessungen in gleicher Weise beobachtet werden.

VARIANTE	ROTOR100 (1)	ROTOR100 (2)	ROTOR80
Frequenz	934 Hz	972 Hz	892 Hz
Druck, Einlass	6.9 bar	6.9 bar	6.9 bar
Druck, Differenz	2.7 bar	3.75 bar	2 bar
Druck, Amplitude	0.36 bar	0.2 bar	0.17 bar
Rotor, Amplitude	0.026 mm	0.016 mm	0.065 mm
Stator, Amplitude	0.076 mm	0.034 mm	0.011 mm
Geschwindigkeit, Strömung, min	155 m/s	265 m/s	92 m/s
Geschwindigkeit, Strömung, max	180 m/s	273 m/s	135 m/s

Tabelle 5.3: Gemessene und berechnete Parameter der ND-Druckfelder, Knotenzahl drei

In der folgenden Abbildung 5.10 ist die Druckeigenform des Rotor100 mit 2.7 bar Druckdifferenz im Vergleich mit den sechs Einzelmessungen der Knotenzahl drei bei niederdruckseitiger Kavität dargestellt. Mit verschiedenen Druckdifferenzen zwischen 2.6 bar und 3.75 bar konnten zwei Gruppen von Druckverläufen gemessen werden. Die

beiden Messungen mit weniger als 3 bar Druckdifferenz weisen an den Messpunkten am Spalt und in der Mitte der Kavität nahezu gleiche Druckamplituden auf. Der Messpunkt am Befestigungsflansch der Struktur zeigt eine deutlich kleiner Druckamplitude. Daraus kann geschlossen werden, dass in der Nähe des Spaltes, zwischen den beiden ersten Messpunkten, ein Druckmaximum liegt. Die berechnete Eigenform weist einen sehr kleinen Druckgradienten im Bereich des Spaltes auf und unterschätzt den tatsächlichen Druckverlauf geringfügig. Auch die Krümmung der berechneten Kurve ist weniger stark, als es die Messungen für den tatsächlichen Verlauf andeuten.

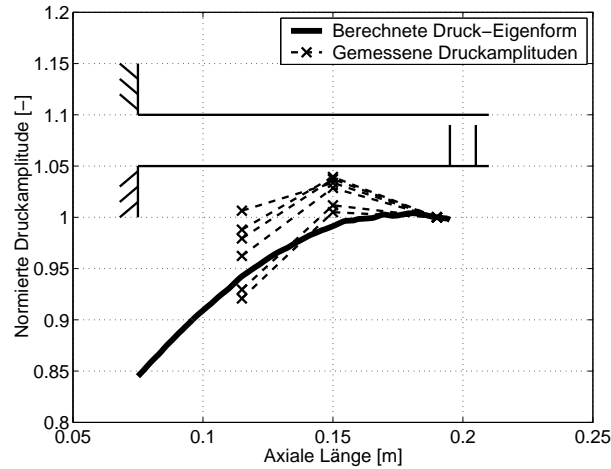


Abbildung 5.10: Vergleich der gemessenen und berechneten Niederdruck-Eigenform bei der Strukturkombination Rotor100/Stator88 und 7 bar Einstromdruck (Knotenzahl 3)

In der Abbildung 5.11 ist der berechnete Druckverlauf aus den Daten mit 3,75 bar Druckdifferenz im Vergleich zu den Messungen dargestellt. Die Gruppe von Messungen mit Druckdifferenzen größer 3 bar zeigt übereinstimmend ein Druckmaximum am mittleren Messpunkt. Bei anwachsender Druckdifferenz können für alle ND-Messungen ansteigende Druckamplituden in der Mitte der Kavität beobachtet werden. Im Falle einer Druckdifferenz von mehr als 3 bar führt dieser Effekt sogar zu Amplitudenmaxima in der Mitte der Kavität, die die Amplitude am Dichtspalt um einige Prozent übersteigen. Diese Vergrößerung der Druckamplitude ist nicht sehr stark ausgeprägt, jedoch deutlich und sehr gut reproduzierbar. Die Druckverläufe in der Kavität resultieren aus dem Verhältnis der Schnelle im Druckfeld zur Strömungsgeschwindigkeit im Dichtspalt. Hohe Strömungsgeschwindigkeiten im Spalt führen zu großen lokalen Beschleunigungen und damit zu einer Vorzeichenumkehr des Koeffizienten. Dieser Effekt ist wegen des raschen Abklingens der lokalen Beschleunigung nach Gleichung 5.29 auf den Bereich am Dichtspalt beschränkt und führt mit zunehmendem Abstand zum Spalt zu stark abfallenden Druckamplituden.

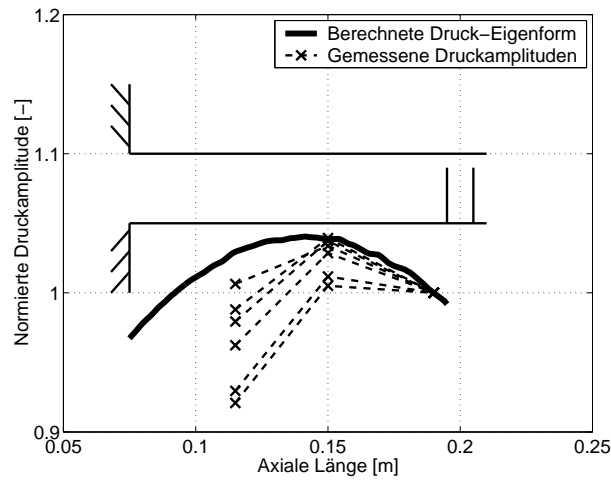


Abbildung 5.11: Vergleich der gemessenen und berechneten Niederdruck-Eigenform bei der Strukturkombination Rotor100/Stator88 und 7 bar Einstromdruck (Knotenzahl 3)

Zusammenfassend ist festzustellen, dass die erweiterte Form der HELMHOLTZ-Gleichung 5.24 insbesondere durch den Koeffizienten aus der konvektiven Beschleunigung der Teilchen im Druckfeld und der lokalen Beschleunigung im Dichtspalt sehr gut als Berechnungsmodell für die gemessenen modalen Druckfelder geeignet ist. Mit den aus stationären Strömungsberechnungen stammenden Geschwindigkeiten im Dichtspalt und der mittels Pegelrechnung aus der gemessenen Druckamplitude berechneten Schnelle der Teilchen im Druckfeld können die lokale und konvektive Beschleunigung der Teilchen in der Kavität bestimmt werden. Diese führen in der Eigenwertgleichung zu den beobachteten Verläufen der Druckeigenformen in der Kavität. Auch die Randbedingungen zur Lösung der HELMHOLTZ-Gleichung gemäß Abschnitt 5.1.3 tragen zur guten Übereinstimmung von berechneten und gemessenen Druckverläufe bei und sind offensichtlich ein geeigneter Ansatzpunkt zur Erstellung allgemeingültiger Berechnungsmodelle.

6 Simulation der gekoppelten Labyrinthschwingungen

6.1 Ausgangssituation für die Modellierung

Die Simulationsrechnungen für die gekoppelten Schwingungen basieren auf einem Modell mit zwei Freiheitsgraden für die beiden Strukturmassen. Das Modell beruht auf Daten aus der FE-Diskretisierung der Strukturen. Es handelt sich jedoch nicht um eine Beschreibung des Schwingungsverhaltens durch die modalen Parameter (Eigenfrequenz, Eigenform und modale Dämpfung), sondern um ein Modell der modalen Schwingung, das die gesamte auftretende Energie bilanziert. Dies bedeutet, dass, ausgehend von der FE-Diskretisierung, die tatsächliche Strukturmasse sowie die Struktur- und Fluidsteifigkeit elementweise berechnet und zu den Koeffizienten der Differentialgleichungen aufsummiert werden. Die Energiebilanz der modalen Schwingung resultiert aus den weg-, geschwindigkeits- und beschleunigungsproportionalen Kräften auf die Einzelelemente und deren Verschiebung bei der gemessenen Frequenz. Bezieht man die in der Labyrinthkammer wirkende Fluidkraft in die Bilanz mit ein, so wird die Schwingung durch die folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen beschrieben, die durch die Fluidsteifigkeit k_F gekoppelt sind.

$$\begin{bmatrix} M_R & 0 \\ 0 & M_S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{s}_R \\ \ddot{s}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_R & 0 \\ 0 & D_S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{s}_R \\ \dot{s}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_R + k_F & -k_F \\ -k_F & K_S + k_F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_R \\ s_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_R \\ F_S \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Die Indizes in der Gleichung bezeichnen Rotor (R) und Stator (S). Die Dämpfungskoeffizienten werden durch die bekannte Masse M und Struktursteifigkeit K aus der modalen Dämpfung bestimmt. Dabei wird eine schwache Dämpfung angenommen, die geringfügig größer ist, als die gemessene modale Strukturdämpfung und evtl. vorhandene Fluiddämpfung im Druckfeld berücksichtigt. Die Kräfte auf die Strukturen werden durch Integration der sinusförmigen gemessenen Druckfunktion über die Oberfläche der Labyrinthkammer berechnet. Gleichung 6.1 beschreibt einen gekoppelten Schwinger mit zwei Massen und einer Koppelsteifigkeit, wie er in Abbildung 6.1 dargestellt ist.

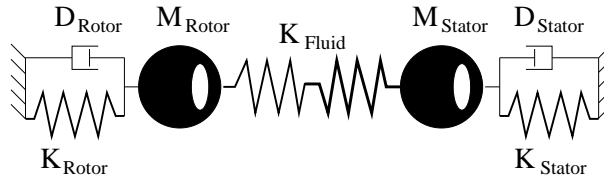


Abbildung 6.1: Einfaches Modell des gekoppelten Systems mit zwei Strukturmassen

Die effektiv an der Schwingung beteiligte Masse wird aus den Einzelmassen der Elemente des FE-Modells aufsummiert. Berücksichtigt werden nur diejenigen Elemente des zylindrischen Strukturteils, deren Knotenpunkte mindestens ca. 3 % der maximalen radialen Schwingungsamplitude aufweisen. Vernachlässigt werden damit alle Elemente des Befestigungsflansches, da dieser nicht vom Druckfeld beaufschlagt wird. Die an den Flansch angrenzenden Elemente des zylindrischen Teils weisen nur geringe radiale Wegamplituden auf, weil der Flansch auf diesen Bereich eine versteifende Wirkung hat. Da das Druckfeld an der Position des Flansches teils große Amplituden erreicht, würde die Einbeziehung dieses Bereiches zu einer deutlichen Verfälschung (Überschätzung) der Fluidsteifigkeit führen. Bei Kenntnis der effektiven Masse der Struktur kann aus der bekannten Beziehung

$$\omega_0^2 = \frac{K}{M} \quad (6.2)$$

mit der ebenfalls bekannten Eigenfrequenz der Strukturen die modale Steifigkeit beider Strukturen berechnet werden. Ferner kann mit den nunmehr bekannten Größen der Dämpfungskoeffizient D aus

$$d = \frac{D}{2\sqrt{KM}} \quad (6.3)$$

berechnet werden. Dabei entspricht d der gemessenen modalen Dämpfung in Prozent und wird auch als dimensionsloses LEHRsches Dämpfungsmaß bezeichnet.

Zur Berechnung der Fluid-Koppelsteifigkeit wird für jeden FE-Knoten N der Strukturen ein zugehöriges Element mit der Oberfläche A_E bestimmt. Bei bekannter Struktureigenform ist von diesem Knoten die Verschiebung \hat{s}_N bekannt und die lokale Amplitude des Druckfeldes \hat{p}_N kann aus der Druckeigenform interpoliert werden. Damit gilt für die Amplitude der gesuchten Fluidsteifigkeit \hat{K}_E an dem Flächenelement

$$\hat{K}_E = \frac{\hat{p}_N \cdot A_E}{\hat{s}_N}. \quad (6.4)$$

Die gesamte Fluidsteifigkeit wird als Parallelschaltung der Element-Fluidsteifigkeiten behandelt. Die Fluidsteifigkeit resultiert somit aus der Summe der einzelnen Fluidsteifigkeiten an den Flächenelementen.

In Gleichung 6.1 verbleibt schließlich noch die Bestimmung der Fluid-Erregerkräfte F_R und F_S . Ihre Berechnung erfolgt aus dem Amplitudenwert der Druckänderung im Labyrinth \hat{p}_K , der entweder aus Messungen stammt, oder mittels geeigneter Strömungsrechnungen abgeschätzt werden kann. Der sinusförmige Druckverlauf im Labyrinth mit einer der Strukturschwingung entsprechenden Knotenzahl wird über den

Umfang der Labyrinthkammer S_D integriert und mit der Breite der Kammer b_K multipliziert, um den Amplitudenwert der Fluidkraft zu erhalten. Die Multiplikation der ortsabhängigen Fluidkraft mit der ebenfalls ortsabhängigen Verschiebung u_K der Strukturoberfläche und Integration des Produktes über die Umfangslänge des Labyrinths ergibt schließlich die Fluidarbeit W_F .

$$W_F = \int_{S_D} b_K \hat{p}_K \sin(k s) \hat{u}_K \sin(k s) ds = b_K \hat{p}_K \hat{u}_K \int_{S_D} \sin^2(k s) ds \quad (6.5)$$

Die Fluidarbeit resultiert somit aus dem Integral über das Quadrat einer Sinusfunktion, die mit den Amplitudenwerten von Druck und Verschiebung skaliert wird.

6.2 Energiegleichgewicht bei stationären Schwingungen

Stationäre Schwingungszustände sind durch ein Gleichgewicht aller an den Strukturen wirkenden Energien gekennzeichnet. Das Fluid verrichtet bei den gemessenen Schwingungszuständen gerade soviel Arbeit an den Strukturen, dass die Verluste durch Dämpfung ausgeglichen werden und die Schwingungsamplitude konstant bleibt. Zur Simulation grenzstabiler Labyrinthschwingungen soll daher ein einfaches Modell erstellt werden, mit dem gezeigt werden kann, dass die gemessenen Amplituden und Frequenzen zu einem stationären Schwingungszustand des Systems gehören, der durch ein Gleichgewicht aller an der Schwingung beteiligten Kräfte und Energieformen gekennzeichnet ist.

Eine Kräftebilanz ohne Berücksichtigung der schwachen Dämpfung resultiert aus Gleichung 6.1, wenn die Ableitungen der Wegkoordinate aus einem zeitharmonischen Ansatz gebildet und die Gleichung umgestellt wird:

$$\begin{bmatrix} K_R + k_F & -k_F \\ -k_F & K_S + k_F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{s}_R \\ \hat{s}_S \end{bmatrix} \cdot \sin(\omega t) \cong \begin{bmatrix} \pm \hat{F}_R \\ \pm \hat{F}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_R & 0 \\ 0 & M_S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{s}_R \\ \hat{s}_S \end{bmatrix} \cdot \omega^2 \sin(\omega t) \quad (6.6)$$

In dieser Gleichung wird die Phase der Erregerkräfte bezüglich der Wegkoordinate durch einen Vorzeichenwechsel in der Resonanz berücksichtigt. Aus Gleichung 6.6 kann eine Abschätzung der modalen Verformungsenergie abgeleitet werden. Unterkritisch entspricht die Summe aus Fluidarbeit und kinetischer Energie der Verformungsenergie, überkritisch ist es die Differenz aus kinetischer Energie und Fluidarbeit.

Bei einem einfachen Feder-Masse-System ist die Verformungsenergie W_{el} in der masselosen Feder mit der Steifigkeit K lokalisiert und der Amplitudenwert der Verformungsenergie bei der Schwingungsamplitude \hat{s} beträgt

$$|W_{el}| = \left| \int K \cdot s ds \right| = \frac{K}{2} \cdot \hat{s}^2. \quad (6.7)$$

Die kinetische Energie W_{kin} der Masse M ist dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, die bei einem zeitharmonischen Ansatz dem Produkt von Weg und Winkel-

geschwindigkeit entspricht. Somit ist auch die kinetische Energie bei der festen Systemfrequenz quadratisch von der Wegamplitude abhängig:

$$|W_{kin}| = \left| \int M \cdot \dot{s} \, d\dot{s} \right| = \left| \frac{M}{2} \cdot \dot{s}^2 \right| = \frac{M}{2} \cdot \omega^2 \hat{s}^2 \quad (6.8)$$

Die Geschwindigkeit erfährt durch die Ableitung einen Phasenwinkel von $\pi/2$ gegenüber dem Weg. Kinetische und Verformungsenergie haben in der Resonanz gleiche Beträge, jedoch sind die Zeitverläufe wie Sinus und Cosinus. Es handelt sich um Blindarbeiten, deren Summe im Verlauf einer Periode zu Null wird [HAH92]. Ist bei einer festen Wegamplitude die Frequenz kleiner als die Eigenfrequenz, so ist auch die kinetische Energie geringer als die Verformungsenergie. Die Erregerkraft ist nahezu gleichphasig mit der Verschiebung und kompensiert dadurch die Differenz zwischen kinetischer und Verformungsenergie. Bei Frequenzen oberhalb der Resonanz ist die kinetische Energie größer als die Verformungsenergie, so dass die Erregerkraft nahezu gegenphasig zur Bewegung der Masse wirkt und die Verschiebung der Masse hemmt. Auch in diesem Fall wird die Summe der Energien zu Null. Nur bei der Resonanzfrequenz beträgt die Phase zwischen Kraft und Weg genau $\pi/2$ und die Erregerkraft kompensiert ausschließlich die geschwindigkeitsproportionale Dämpfungsarbeit.

Aus den FE-Berechnungen der Strukturmoden resultieren keine Absolutwerte der Verformungsenergie. Die Summe aller Element-Verformungsenergien (Strain-Energy) entspricht gerade dem Wert $W_{el} = 0.5 \cdot K$, also der halben modalen Steifigkeit der betrachteten Eigenform. Der Wert folgt aus der Normierung der Massenmatrix und aus Einheitsverschiebungen der Knoten in Gleichung 6.7. Aus den Zahlenwerten der modalen Verformungsenergie resultiert also lediglich die Verteilung auf die einzelnen FE-Knoten der Eigenform. Zudem werden die tatsächlich auftretenden Spannungs- und Dehnungszustände stark vereinfacht, indem sie auf eine modale Elementsteifigkeit reduziert werden. Abbildung 6.2 zeigt diese Vereinfachung der Verformungsenergien eines Strukturelementes zu einer einfachen Federsteifigkeit.

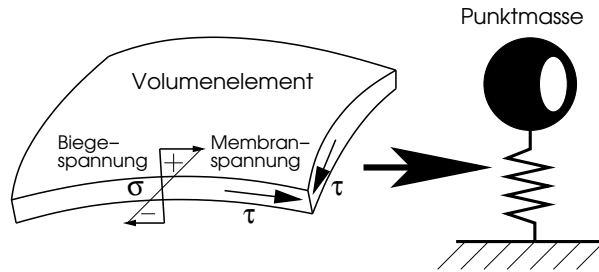


Abbildung 6.2: Übertragung komplexer Verformungsenergien auf ein einfaches Modell

Wegen dieser Schwierigkeit bei der Bestimmung von Absolutwerten der modalen Verformungsenergie wird eine Abschätzung über die einfacher zu berechnende kinetische Energie gewählt. Die kinetische Energie der einzelnen Elemente kann aus den Elementmassen, der Frequenz der Schwingung und den Knotenverschiebungen berechnet werden. Die kinetische Energie der gesamten Struktur resultiert aus der Summe der Bewegungsenergien aller Elemente der Strukturdiskretisierung.

6.3 Berechnung der Amplitudenverstärkung des Zwei-Massen-Schwingers

Die frequenzabhängige Amplitudenverstärkung $A(\omega)$ eines schwingungsfähigen Systems ist das dimensionslose Verhältnis zwischen der dynamischen Wegamplitude eines Freiheitsgrades und der statischen Verschiebung infolge der Erregerkraft. Im dynamischen Fall führt die Erregerkraft zu einer Strukturverformung, die um den Faktor der Amplitudenverstärkung größer ist, als die Verformung aufgrund der statisch einwirkenden Kraft. Die Kenntnis der frequenzabhängigen Amplitudenfunktion ermöglicht die Bestimmung der aus einer Anregung resultierenden dynamischen Wegamplitude und damit auch der dynamischen Verstärkung der kinetischen Energie der Strukturschwingung infolge der Erregerkraft. Bei einem zeitharmonischen Ansatz für den Weg ist die Geschwindigkeitsamplitude durch die Winkelgeschwindigkeit mit den Verschiebungen verknüpft. Die um die dynamische Verstärkung reduzierte kinetische und Verformungsenergie hängen daher quadratisch vom Kehrwert der Amplitudenverstärkung ab und weisen einen parabelförmigen Verlauf mit einem Minimum in der Resonanzfrequenz auf. Diese reduzierten Energieverläufe bilden zusammen mit der Fluidarbeit bei den gemessenen Frequenzen des Systems ein Energiegleichgewicht. Die als Absolutwert schwierig zu bestimmende Verformungsenergie kann gemäß Gleichung 6.6 durch die leichter zu berechnende Summe bzw. Differenz aus kinetischer Energie und Fluidarbeit abgeschätzt werden. Aus dieser Abschätzung der Verformungsenergie kann durch Division mit $A^2(\omega)$ die statisch äquivalente Verformungsenergie berechnet werden, die bei der jeweiligen Frequenz und Verschiebung mit der Fluidarbeit im Gleichgewicht ist.

Die Berechnung der Amplitudenverstärkung beider Massen wird mit dem Programm MATLAB und unter Anwendung der CRAMERSchen Regel durchgeführt. Es werden zunächst die Ableitungen $|\dot{s}| = i\omega s$ und $|\ddot{s}| = -\omega^2 s$ der Verschiebungen gebildet und damit Gleichung 6.1 als Koeffizientenmatrix geschrieben. Zur Berechnung der Wegamplitude der ersten Masse wird die erste Spalte der Koeffizientenmatrix durch den Spaltenvektor der Inhomogenitäten (Erregerkräfte) ersetzt und davon die Determinante berechnet. Der Quotient aus dieser Determinante und der Determinante der ursprünglichen Koeffizientenmatrix ergibt die gesuchte Auslenkung.

$$\frac{\begin{bmatrix} F_R & -k_F \\ F_S & K_S + k_F + i\omega D_S - \omega^2 M_S \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} K_R + k_F + i\omega D_R - \omega^2 M_R & -k_F \\ -k_F & K_S + k_F + i\omega D_S - \omega^2 M_S \end{bmatrix}} = s_R \quad (6.9)$$

Die Berechnung der Wegamplitude der zweiten Masse erfolgt analog durch Austausch der zweiten Spalte in der Koeffizientenmatrix. Die Kräfte in Gleichung 6.1 werden linear von der Frequenz abhängig gemacht, so dass, vom Wert Null ausgehend, bei der gemessenen Frequenz gerade die gemessene Kraft erreicht wird. Der gesamte Frequenzbereich, in dem die Gleichungen 6.9 gelöst werden sollen, wird in äquidistante Punkte unterteilt, an denen die Amplitudenfunktionen berechnet werden.

Die kinetische Energie weist eine quadratische Abhängigkeit von der Frequenz und der Verschiebung auf. Nach Gleichung 6.6 wird aus der Summe bzw. Differenz von kinetischer Energie und Fluidarbeit die Verformungsenergie abgeschätzt. Die Division durch das Quadrat der Amplitudenverstärkung eliminiert die dynamische Überhöhung der Näherung für die Verformungsenergie. Daraus resultiert ein parabelförmiger Verlauf und die um den dynamischen Anteil verminderte Verformungsenergie schneidet bei der gemessenen Frequenz die linear verlaufende Fluidarbeit. Der Schnittpunkt kennzeichnet somit das Gleichgewicht aus der wegabhängigen Fluidarbeit und der um den Anteil der dynamischen Amplitudenverstärkung verminderten Verformungsenergie.

Zur Berechnung der Amplitudenverstärkung ist anzumerken, dass die Funktion nur in einem kleinen Bereich um die gemessene Frequenz Gültigkeit hat. Insbesondere ist aus Messungen bekannt, dass die koppelnde Fluidsteifigkeit kein konstanter Wert ist, sondern mit der Frequenz variiert und abhängig ist von Versuchsparametern wie Zustromdruck und Druckdifferenz. Ändern sich Frequenz oder Betriebsparameter, so müsste Gleichung 6.1 für einen veränderten Schwingungszustand mit anderen Koeffizienten neu berechnet werden und würde dadurch auch zu anderen Wegamplituden und Resonanzfrequenzen führen. Damit ist auch die Existenz mehrerer Schwingungszustände einer Versuchskonfiguration erklärbar, die sich bezüglich der dynamischen Parameter unterscheiden. Auch können in den Simulationsrechnungen die gemessenen Phasenwinkel zwischen Druckfeld und Strukturschwingung mit dem einfachen Zwei-Massen-Modell nicht wiedergegeben werden. Die gemessenen Phasenwinkel zwischen dem modalen Druckfeld und den Strukturen werden durch das Vorzeichen der Koppelsteifigkeit im Modell berücksichtigt. Ebenso können die entsprechenden Phasen zwischen den Fluidkräften und den Strukturschwingungen mit einem Zwei-Massen-Modell nicht nachvollzogen werden. Sie müssen als bekannte Größen im Berechnungsansatz bereits vorhanden sein.

6.4 Ergebnisse der Simulationsrechnungen

6.4.1 Darstellungsweise der Simulationsrechnungen

Nach WÖLFEL [WOE96] “liefert die Vergrößerungsfunktion für die harmonische Erregung die dynamische Überhöhung von Verschiebungen und Kräften eines Schwingers mit einem Freiheitsgrad als Funktion von Erreger- und Eigenfrequenz mit dem Parameter Dämpfung.” Dies trifft in gleichem Maße auf Schwinger mit mehr als einem Freiheitsgrad zu. Wegen der zeitharmonischen Druckbeaufschlagung der Labyrinthkammer-Oberflächen ist die Voraussetzung harmonischer Erregerkräfte gegeben. Mit den modalen Dämpfungen und Eigenfrequenzen des Berechnungsmodells 6.1 können die Amplitudenverstärkungen berechnet und damit die dynamische Überhöhung der Wege an den beiden Freiheitsgraden bestimmt werden. Da die kinetische Energie bzw. die nach Gleichung 6.6 abgeschätzte Verformungsenergie quadratisch von der Verschiebung abhängen, führt die Division der gemessenen Verschiebung durch den Verstärkungsfaktor zu genau demjenigen Betrag der Verformungsenergie, der ohne Berücksichtigung dynamischer Einflüsse

aus der einwirkenden Fluidarbeit resultieren würde. Auf diese Weise ist es möglich, die um die dynamischen Einflüsse verminderte Verformungsenergie mit der vom Fluid an der Struktur verrichteten Arbeit zu vergleichen. Mit den Simulationsrechnungen soll gezeigt werden, dass für jede der Strukturen bei der gemessenen Frequenz ein Gleichgewicht zwischen der um die dynamische Verstärkung verminderten Fluidarbeit und der Verformungsenergie besteht.

Die Simulationsergebnisse hängen entscheidend von der Berechnung der Koppelsteifigkeit durch das modale Druckfeld in der Kavität ab. Erst die Möglichkeit, durch die lokalen und konvektiven Beschleunigungen die axiale Gestalt des Druckfeldes zu beeinflussen, ermöglicht eine hinreichend genaue quantitative Bestimmung der Koppelsteifigkeit. Da die gemessenen grenzstabilen Schwingungszustände überwiegend durch große Steigungen der Amplitudenfunktion im Betriebspunkt gekennzeichnet sind, ist eine genaue Berechnung der Koeffizienten in Gleichung 6.1 notwendig, um in einer Umgebung der gemessenen Frequenz die gesuchte Energiegleichheit aufzufinden. Die Amplitudenfunktionen weisen Nullstellen auf, die aus dem Berechnungsansatz für die Richtung der Wegkoordinaten und der Wirkrichtung der Fluidkräfte resultieren. In Gleichung 6.1 sind die Wegkoordinaten gleichgerichtet. Die Wirkrichtung der Fluidkräfte kann bezüglich der Wegkoordinaten durch entsprechende Vorzeichen frei gewählt werden. Dies führt teilweise zu zusätzlichen Nulldurchgängen der Amplitudenfunktionen, wenn die Massen zu einer Bewegung wechseln, die gegenphasig zur vorgegebenen Kraftrichtung ist.

Zur Beurteilung der Simulationsergebnisse für die gemessenen Schwingungen werden insgesamt vier graphische Darstellungen herangezogen. Die erste Darstellung zeigt die beiden Amplitudenfunktionen in einem weiten Frequenzbereich. Die gemessene Frequenz des Systems ist in sämtlichen Darstellungen durch eine senkrechte Linie markiert. Für die Berechnung der Amplitudenfunktion werden die Koeffizienten in Gleichung 6.1 als frequenzunabhängig betrachtet, was jedoch nur in einer kleinen Umgebung der gemessenen Frequenz annähernd zutrifft. Mit wachsendem Frequenzabstand verändern sich insbesondere die strömungsabhängige Fluidkraft und das modale Druckfeld, so dass die Darstellung dann ihre Gültigkeit verliert. In der zweiten graphischen Darstellung werden die Energiesummen beider Strukturen verglichen. Da die Kehrwerte der Amplitudenfunktionen in die Berechnung der um den dynamischen Anteil reduzierten Verformungsenergie eingehen, wird in der Resonanz ein Minimum der Verformungsenergie erreicht. Nullstellen der Amplitudenfunktion werden dagegen zu Polstellen der Energiefunktion. Da in dieser Summendarstellung teilweise Fehler aus den Einzelberechnungen der Strukturen ausgeglichen werden, weist diese Darstellung meist die beste Übereinstimmung zwischen dem berechnetem Betriebspunkt und der gemessenen Systemfrequenz auf. In den Darstellungen drei und vier der unteren Zeile, sind die Energiebilanzen für jede der Strukturen einzeln dargestellt.

6.4.2 Simulationsergebnisse bei Schwingungen mit hochdruckseitiger Kavität

Schwingungen der Strukturkombination des steifen Rotor100 und Stator88

Bei hochdruckseitiger Kavität wird stets die Knotenzahl zwei als dominante Schwingungseigenform des gekoppelten Systems identifiziert. Die Simulationsergebnisse in Abbildung 6.3 zeigen den Betriebspunkt des gekoppelten Systems bei 902 Hz und damit nahe bei der berechneten ersten Resonanz von 885 Hz . Die Amplitudenfunktionen weisen bei der Systemfrequenz große Steigungen auf, so dass geringfügige Frequenzänderungen, die aus Änderungen der Versuchsparameter resultieren, zu großen Änderungen der Amplitudenverstärkung führen. Aus diesem Zusammenhang kann das beobachtete instabile Verhalten von Labyrinthdichtungen erklärt werden: Geringfügige Änderungen der Betriebsdrücke können sowohl zu schnellem Aufklingen bis zum Anstreifen der Strukturen führen wie auch zum raschen Abklingen der Schwingung.

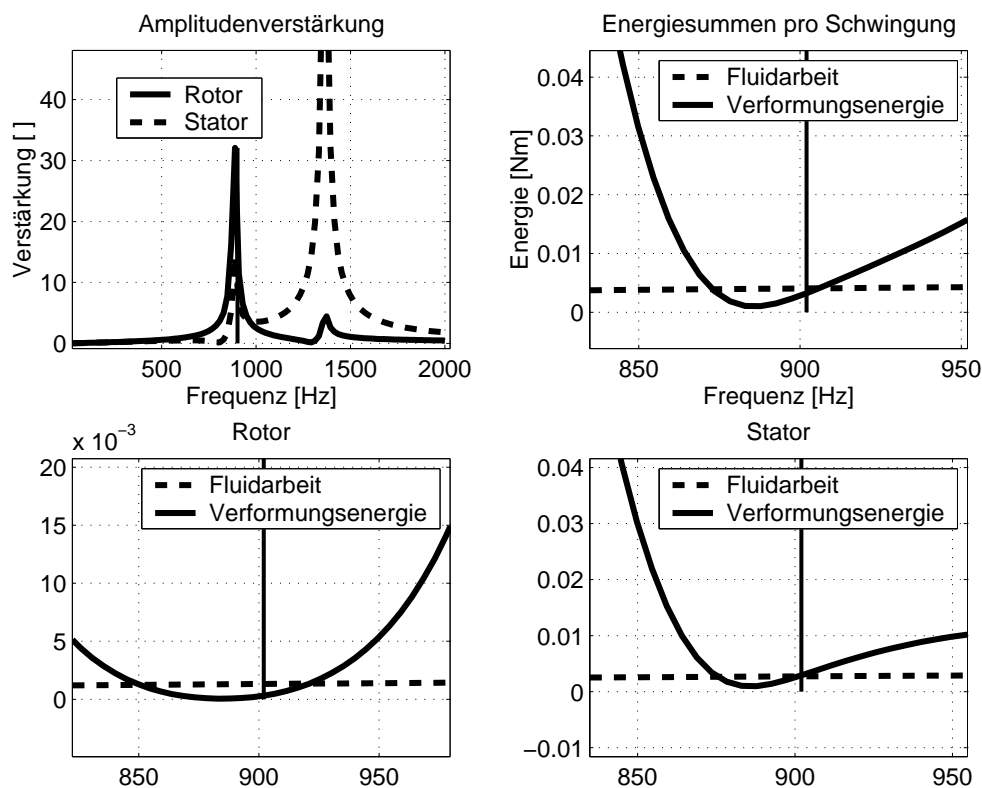


Abbildung 6.3: Amplitudenverstärkung und Energie-Vergleich der HD- Strukturkombination Rotor100/Stator88 (7 bar Einstromdruck und Knotenzahl 2)

Die Fluidarbeit an Rotor und Stator zeigt im betrachteten Frequenzbereich einen nahezu horizontalen Verlauf bei sehr geringem Absolutwert. In der Resonanz verschwindet aufgrund der starken Amplitudenverstärkung die pro Schwingung zuzuführende Energie,

so dass für den Stator bei den gemessenen 900 Hz und für den Rotor bei ca. 920 Hz ein Energiegleichgewicht berechnet wird. Nach Tabelle 4.1 liegt die berechnete Resonanz des Systems nur ca. 10% über der Eigenfrequenz des Rotors von 800 Hz . Daher ist die Amplitudenverstärkung des Rotors im betrachteten Frequenzbereich wesentlich höher als die Amplitudenverstärkung des Stators. Dennoch werden am Rotor bei hochdruckseitiger Kavität stets kleinere Amplituden gemessen als am Stator. In diesem Falle sind es ca. $40\text{ }\mu\text{m}$ am Rotor und ca. $90\text{ }\mu\text{m}$ am Stator. Die beiden Darstellungen der Energiebilanz für die einzelnen Strukturen zeigen beim Stator eine gute Übereinstimmung der berechneten Frequenz des Energiegleichgewichts mit der gemessenen Frequenz. Erkennbar ist jedoch auch, dass die Energiebilanz hauptsächlich durch den Stator bestimmt wird.

Schwingungen der Strukturkombination von Rotor80 und Stator88

Die Simulation der gekoppelten Schwingung des weniger steifen Rotor80 mit dem Stator88 führt auf eine Resonanzfrequenz von 842 Hz . Die gemessene Frequenz des gekoppelten Systems liegt bei 867 Hz . Abbildung 6.4 zeigt die Simulationsergebnisse für diese Strukturkombination. Das Energiegleichgewicht wird bei ca. 870 Hz für den Rotor und ca. 890 Hz für den Stator berechnet und weicht somit nur wenige Prozent von der gemessenen Frequenz ab. Bei dieser Simulation liegt die Frequenz der Energiegleichheit des Rotors näher an dem gemessenen Wert, als die des Stators. Die Amplitude der Rotor-schwingung wurde mit ca. $30\text{ }\mu\text{m}$ gemessen, während die des Stators ca. $65\text{ }\mu\text{m}$ beträgt. Da zur Berechnung der Fluidarbeit an beiden Strukturen die gleiche Druckamplitude angenommen wird, ist die vom Fluid am Stator verrichtete Arbeit etwa doppelt so groß, wie die am Rotor verrichtete Arbeit. Die Amplitude des modalen Druckfeldes ist mit ca. 0.32 bar geringfügig kleiner als bei der zuvor beschriebenen Messung mit steifem Rotor100. Die aus dem Verhältnis von Druck und Verschiebung resultierende Koppelsteifigkeit ist demnach bei dieser Strukturkombination etwas größer als bei dem Rotor100 mit größeren Wegamplituden. Gleichzeitig ist die Struktureigenfrequenz des Rotor80 um ca. 140 Hz gegenüber dem Rotor100 auf lediglich 662 Hz abgesenkt. Aus der höheren Koppelsteifigkeit in Verbindung mit der wesentlich geringeren Struktureigenfrequenz des Rotor80 resultiert offensichtlich die relativ geringe Absenkung der Eigenfrequenz dieser Strukturkombination um nur ca. 40 Hz .

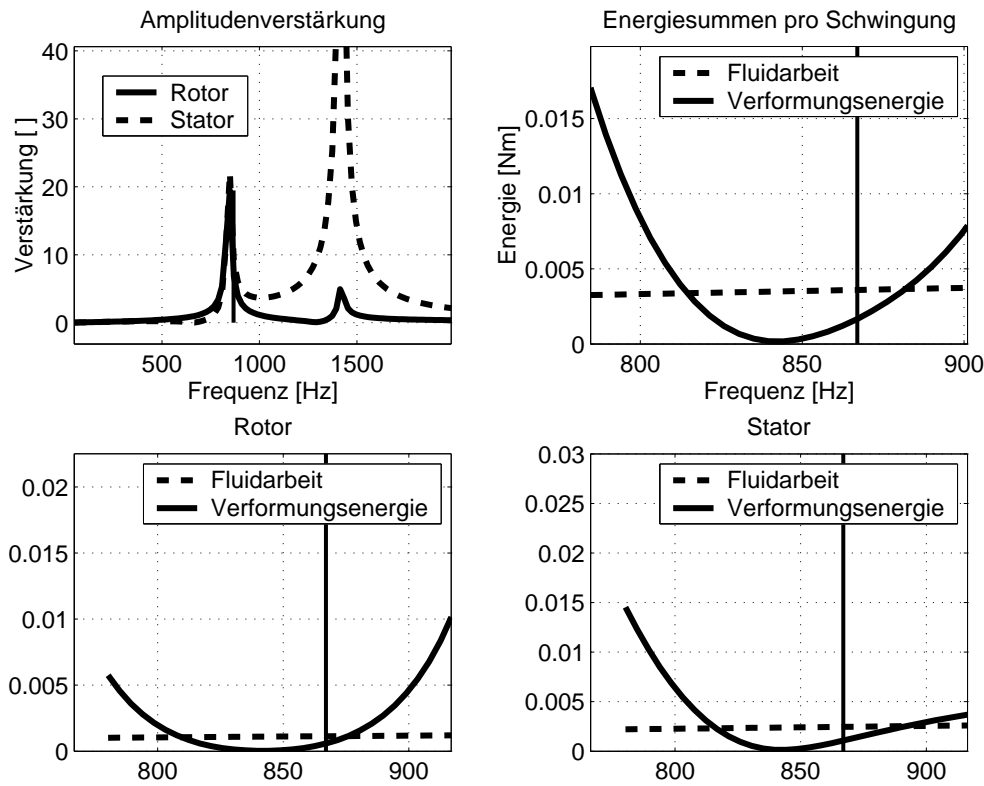


Abbildung 6.4: Amplitudenverstärkung und Energie-Vergleich der HD- Strukturkombination Rotor80/Stator88 (7 bar Einstromdruck und Knotenzahl 2)

Schwingungen der Strukturkombination von Rotor80 und Stator50

Am Beispiel der weniger steifen Strukturkombination Rotor80/Stator50 kann die Auswirkung von Messdaten mit starken Streuungen demonstriert werden. Wie bereits beschrieben, sind bei den weicheren Strukturkombinationen die Messergebnisse mit starken Schwankungen behaftet, deren Ursache nicht genau geklärt ist. Die in Abschnitt 4.5 beschriebene Überlagerung orthogonaler Moden tritt offensichtlich mit Winkel- und Amplitudendifferenzen auf, so dass wegen der Streuung der Messwerte die tatsächlich vorhandene Fluidarbeit und Koppelsteifigkeit nicht genau bestimmt werden können. Das Ergebnis der Simulation ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Die Ungenauigkeiten führen zu einer deutlich größeren Abweichung zwischen gemessener Systemfrequenz und berechneter Frequenz des Energiegleichgewichts.

Die Strukturamplituden können mit ca. $22 \mu m$ am Rotor und ca. $76 \mu m$ am Stator abgeschätzt werden. Es zeigt sich auch hier wieder die für hochdruckseitige Kavitäten typische Situation, dass die Statoramplituden weit größer sind als die des Rotors. Die gemessene Frequenz des gekoppelten Systems liegt bei 858 Hz und weicht damit stärker von der berechneten Resonanz bei 785 Hz ab, als dies bei den vorhergehenden Simulationen der Fall ist. Prozentual beträgt die relative Abweichung dennoch nur ca. 8.5 %

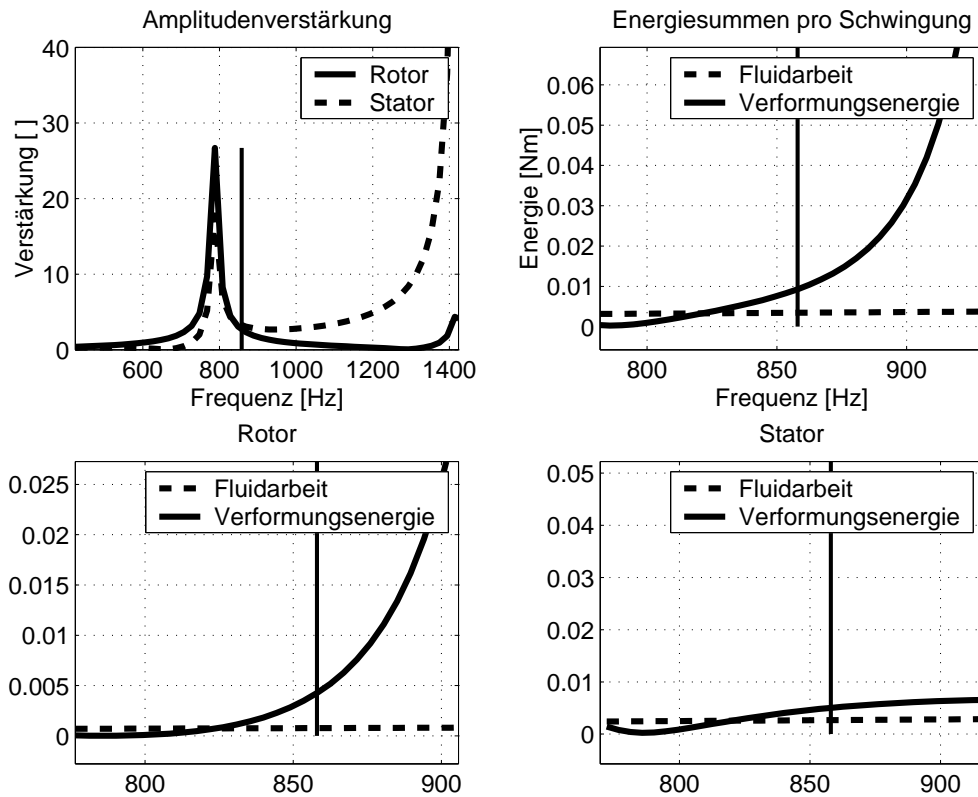


Abbildung 6.5: Amplitudenverstärkung und Energie-Vergleich der HD- Strukturkombination Rotor80/Stator50 (7 bar Einstromdruck und Knotenzahl 2)

und die Schwingungen des gekoppelten Systems stellen auch hier einen grenzstabilen Zustand nahe der Resonanz dar. Betrachtet man jedoch die relative Abweichung zwischen der Fluidarbeit und der um die dynamische Überhöhung verminderte Verformungsenergie bei der gemessenen Frequenz, so ergeben sich für den Rotor ein Faktor von vier bis fünf und für den Stator ein Faktor von ca. zwei.

6.4.3 Simulationsergebnisse bei Schwingungen mit niederdruckseitiger Kavität

Schwingungen der Knotenzahl zwei des steifen Rotor100 und Stator88

Die gemessene Frequenz der steifen Strukturkombination Rotor100/Stator88 bei niederdruckseitiger Kavität ist durch die negative Koppelsteifigkeit gegenüber der hochdruckseitigen Kavität deutlich vermindert. Die gemessene Frequenz beträgt nur noch 684 Hz und die berechnete Resonanz liegt bei lediglich 620 Hz . Der Betriebspunkt der ND-Schwingung liegt oberhalb der ersten Resonanzfrequenz des Systems. bei den gemessenen Daten ist der auffälligste Unterschied zur hochdruckseitigen Kavität die verminderte Schwingungsamplitude bei deutlich größerer Druckdifferenz. Während bei

den HD-Messungen Druckdifferenzen von 0.8 bar bis 1 bar zu Schwingungsamplituden führen, die in der Summe 80 % bis 90 % des Ruhespaltspiels betragen, führen bei den HD-Messungen Druckdifferenzen von 1.7 bar bzw. 2.85 bar zu Amplitudensummen von lediglich $55 \mu\text{m}$ bzw. nur ca. 1/3 des Ruhespaltspiels. Weiterhin ist auffällig, dass der Stator nunmehr wesentlich kleinere Schwingungsamplituden aufweist, die mit wachsender Druckdifferenz kleiner werden und gegen Null gehen.

Die in Abbildung 6.6 dargestellte Amplitudenfunktion des Stators zeigt eine Nullstelle der Verstärkung oberhalb der gemessenen Betriebsfrequenz des gekoppelten Systems. Mit wachsender Druckdifferenz und damit betragsmäßig anwachsender negativer Fluidsteifigkeit sinkt die Resonanz des Systems ab. Dadurch nähert sich der Betriebspunkt einer Nullstelle der Amplitudenfunktion an (Tilgungsfrequenz) und die Statoramplitude sinkt von $10 \mu\text{m}$ auf $4 \mu\text{m}$ ab. Die Bilanz der Energiesumme zeigt eine außerordentlich gute Übereinstimmung von gemessener und berechneter Frequenz, die in dieser Genauigkeit sicher zufällig ist. Da der Stator aufgrund seiner geringen Schwingungsamplitude zur Energiebilanz nur einen untergeordneten Beitrag leistet, wird die Bilanz -im Gegensatz zu den HD-Simulationen- durch die Energie des Rotors bestimmt.

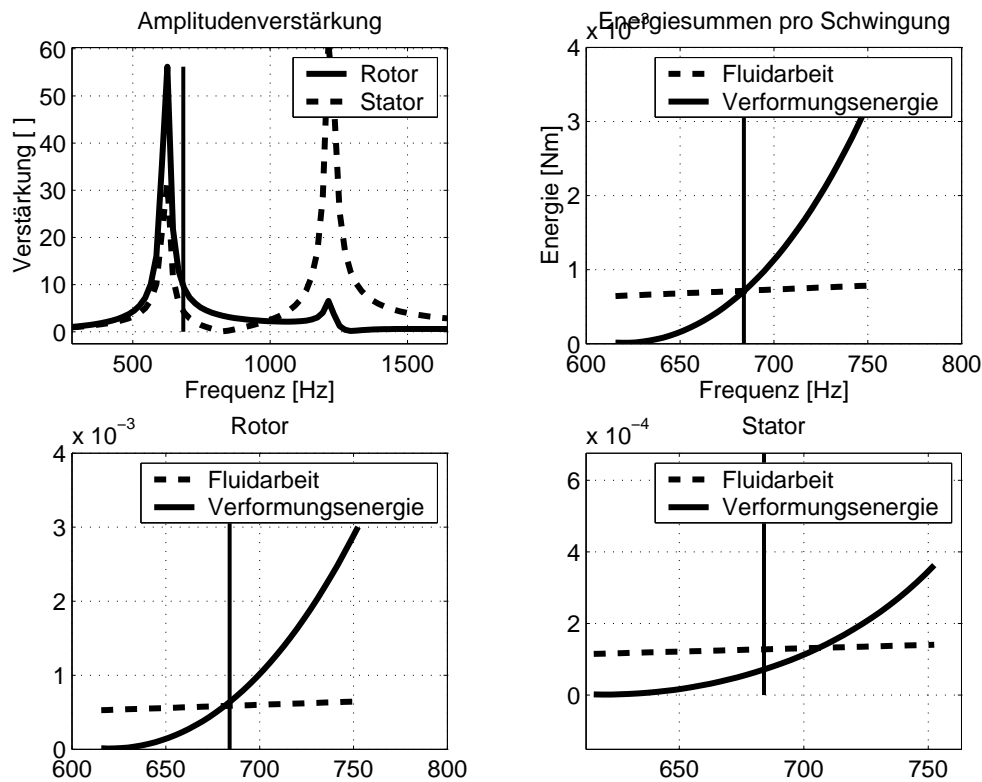


Abbildung 6.6: Amplitudenverstärkung und Energie-Vergleich der ND-Strukturkombination Rotor100/Stator88 (7 bar Einstromdruck und Knotenzahl 2)

Schwingungen der Knotenzahl zwei von Rotor80 und Stator88

Die in Abbildung 6.7 dargestellte Amplitudenfunktion des Systems aus dem weniger steifen Rotor80 und dem Stator88 zeigt eine prinzipiell gleiche Schwingungsform, wie im vorhergehenden Abschnitt. Die gemessene Frequenz beträgt 576 Hz , während die erste Resonanz bei 549 Hz berechnet wird. Die gemessenen Amplituden betragen ca. $100\text{ }\mu\text{m}$ am Rotor und lediglich ca. $5\text{ }\mu\text{m}$ am Stator. Diese nahezu verschwindende Statoramplitude steht in Übereinstimmung mit der berechneten Nullstelle der Amplitudenverstärkung bei ca. 670 Hz . Die Streuung der Messdaten ist bei dieser Messung mit weniger steifem Rotor wiederum größer als bei der steifen Strukturkombination. Dennoch wiederholen sich die bereits oben beschriebenen Tendenzen. Die verminderte Struktureigenfrequenz des Rotors und die negative Koppelsteifigkeit des Druckfeldes führen zu einer deutlichen Absenkung der Resonanzfrequenzen des Systems.

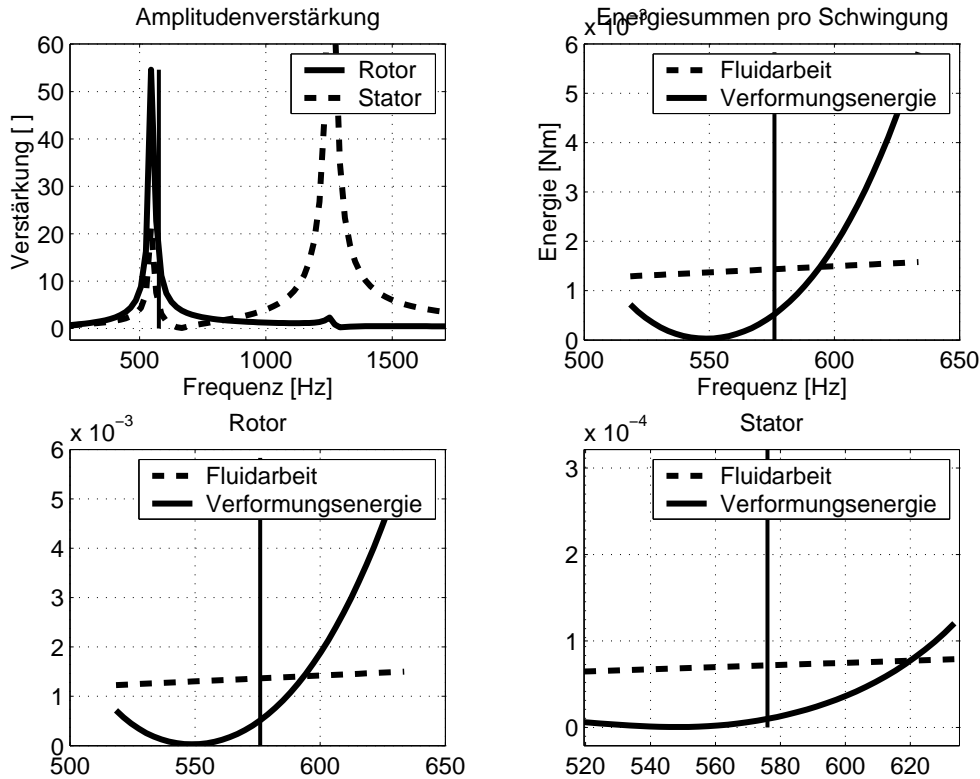


Abbildung 6.7: Amplitudenverstärkung und Energie-Vergleich der ND-Strukturkombination Rotor80/Stator88 (7 bar Einstromdruck und Knotenzahl 2)

Die oberhalb der ersten Resonanz berechnete Nullstelle der Amplitudenfunktion führt zu einem Tilgungseffekt am Stator und damit zu der auffällig kleinen Schwingungsamplitude. Die Darstellungen der Energiegleichgewichte zeigt, dass auch in diesem Fall die Energiebilanz der Schwingung fast vollständig durch den mit großer Amplitude schwingenden Rotor bestimmt wird. Der Anteil des Stators ist nahezu verschwindend gering.

und mit deutlich größeren relativen Fehlern behaftet.

Schwingungen der Knotenzahl drei von Rotor100 und Stator88

Auch für die Schwingungen mit der Knotenzahl drei der steifen Strukturkombination Rotor100/Stator88 bei niederdruckseitiger Kavität ist eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Messung und Simulationsrechnung festzustellen. Dies gilt für sämtliche in Abschnitt 5.2.3 beschriebenen Betriebspunkte des Systems, unabhängig von der Druckdifferenz. Für die beiden dort beschriebenen Druckfeld-Eigenformen mit monoton abfallender Druckamplitude in der Kavität (Abbildung 5.10) bei Druckdifferenzen kleiner 3 bar und mit zunächst ansteigender, dann abfallender Druckamplitude (Abbildung 5.11) bei Druckdifferenzen größer 3 bar, sind die Simulationsergebnisse nahezu identisch. Die Messung mit einer Druckdifferenz von 2.6 bar dient als Grundlage für die Simulationsrechnung in Abbildung 6.8.

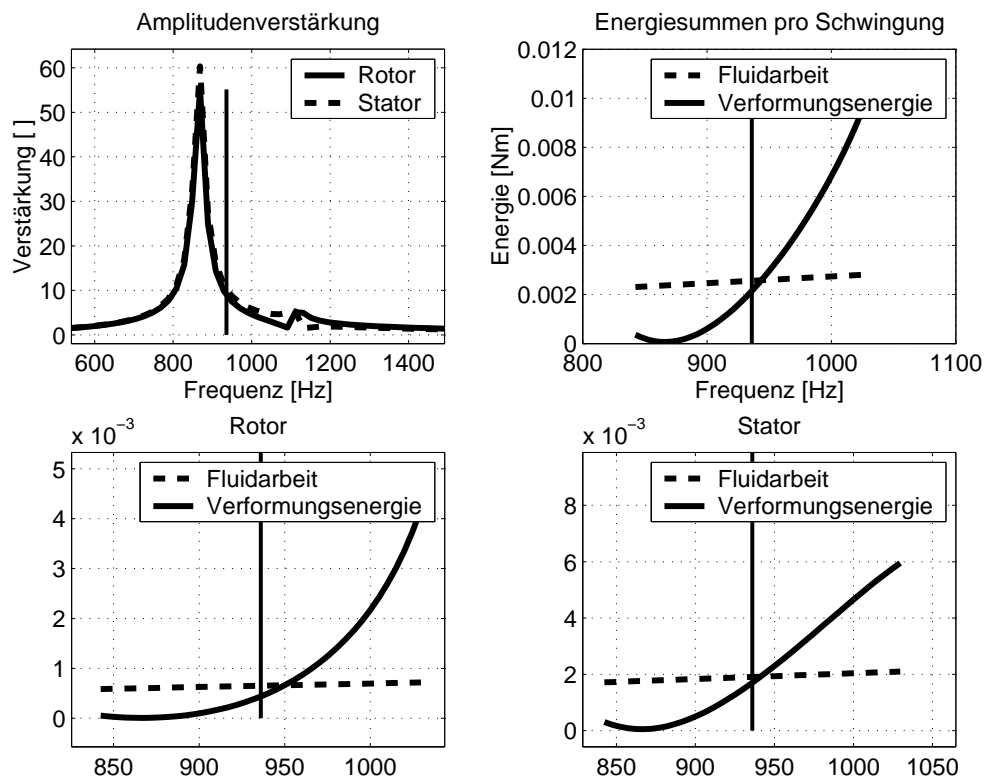


Abbildung 6.8: Amplitudenverstärkung und Energie-Vergleich der ND-Strukturkombination Rotor100/Stator88 (7 bar Einstromdruck und Knotenzahl 3)

Die Schwingung wurde bei 936 Hz gemessen, während die berechnete erste Resonanz bei 867 Hz liegt. Daraus resultiert eine etwas flacher verlaufende Amplitudenfunktion bei der gemessenen Systemfrequenz, die offensichtlich zu dem weiten Bereich

möglicher Druckdifferenzen im Versuch führt. Die Amplitude des Rotors beträgt ca. $26\ \mu m$, die des Stators ca. $76\ \mu m$. Das Amplitudenverhältnis ähnelt somit den Messungen mit der Knotenzahl zwei bei hochdruckseitiger Kavität. Da die Amplitudenfunktionen einen nahezu gleichen Verlauf aufweisen, zeigen die Energiebilanzen von Rotor und Stator übereinstimmend eine Energiegleichheit bei nahezu genau der gemessenen Frequenz. Nicht geklärt werden kann die Frage, warum trotz dieser Ähnlichkeit der Amplitudenfunktionen und der nach Tabelle 4.1 fast gleichen Eigenfrequenz der Strukturen, ein derart deutlicher Unterschied der Schwingungsamplituden von Rotor und Stator beobachtet wird.

6.4.4 Schwingungen des weichen Rotor14 mit dem steifen Stator88

HD-Schwingungen der Knotenzahl zwei von Rotor14 und Stator88

Die in diesem Abschnitt beschriebenen Schwingungen der Strukturkombination Rotor14/Stator88 haben wegen der großen Unterschiede bei den Struktureigenfrequenzen nach Tabelle 4.1 eine gewisse Sonderstellung. Die Messungen mit hochdruckseitiger Position der Kavität weisen bei einem leicht verminderten Einstromdruck von $5\ bar$ eine Ähnlichkeit mit den steiferen Strukturkombinationen auf. Da beim dünnwandigen Rotor14 eine beträchtliche Streuung der Messdaten auftritt, sind die Messwerte als Grundlage für Simulationsrechnungen nur bedingt zuverlässig. Abbildung 6.9 zeigt das Simulationsergebnis für diese Strukturkombination bei HD-seitiger Kavität. Das mit Messdaten skalierte HD-Druckfeld überschätzt offenbar die tatsächliche Koppelsteifigkeit, da der Frequenzabstand zwischen der gemessenen Systemfrequenz bei $862\ Hz$ und der berechneten Resonanz bei $914\ Hz$ recht groß ist. Auch weisen nur die Simulationsrechnungen mit dem dünnwandigen Rotor14 einen Betriebspunkt unterhalb der ersten Resonanz des gekoppelten Systems auf. Der Stator weist eine Amplitude von $22\ \mu m$ auf und die Energiegleichheit wird nahe bei der gemessenen Frequenz berechnet. Der mit einer Amplitude von $33\ \mu m$ schwingende Rotor weist in der Simulation eine sehr geringe Amplitudenverstärkung auf und zeigt erst unmittelbar vor der Resonanzfrequenz Energiegleichheit. Wegen dieser geringen Amplitudenverstärkung ist die Energiesumme fast vollständig durch den Rotor bestimmt.

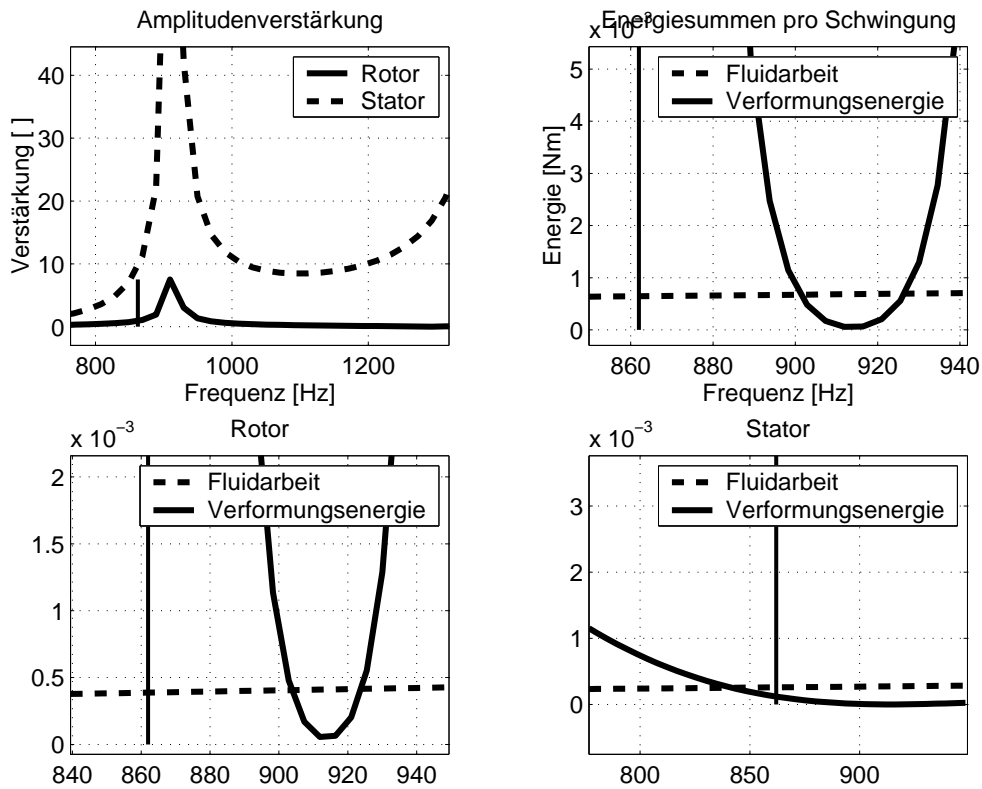


Abbildung 6.9: Amplitudenverstärkung und Energie-Vergleich der HD-Strukturkombination Rotor14/Stator88 (5 bar Einstromdruck und Knotenzahl 2)

ND-Schwingungen der Knotenzahl drei von Rotor14 und Stator88

Die Schwingungen des sehr weichen Rotor14 in Verbindung mit dem steifen Rotor88 bei niederdruckseitiger Kavität weisen eine extreme Form von Instabilität auf, die mit keiner anderen Versuchskonfiguration zu vergleichen ist. Die notwendigen Druckdifferenzen liegen im Millibar-Bereich und die Frequenz der Schwingung stimmt nahezu mit der Struktureigenfrequenz des Rotors überein. Der steife Stator ist an der Schwingung nahezu unbeteiligt. Aus Abbildung 6.10 ist ersichtlich, dass die Amplitudenfunktion des Rotors in der ersten Resonanz nur sehr wenig durch den Stator beeinflusst wird. Die Struktureigenfrequenz des Rotors liegt nach Tabelle 4.1 bei 285 Hz . Die gemessene Frequenz beträgt 272 Hz und die berechnete erste Resonanz liegt bei 264 Hz . Die Amplitude des Rotors beträgt $65 \mu\text{m}$, während die des Stators mit lediglich $0.1 \mu\text{m}$ gemessen wurde. Die Druckamplituden in Labyrinth und Kavität betragen jeweils nur wenige Millibar. Der Einstromdruck beträgt bei dieser Messung lediglich 3 bar , da bei höheren Einlassdrücken die geringe Druckdifferenz nicht genau genug einjustiert werden konnte. Man kann in diesem speziellen Fall den Stator als eine starre Wand betrachten. Die Anregung der Schwingungen wird möglicherweise durch Strömungsrauschen verursacht,

das die dünnwandige Struktur zu Eigenschwingungen anregt.

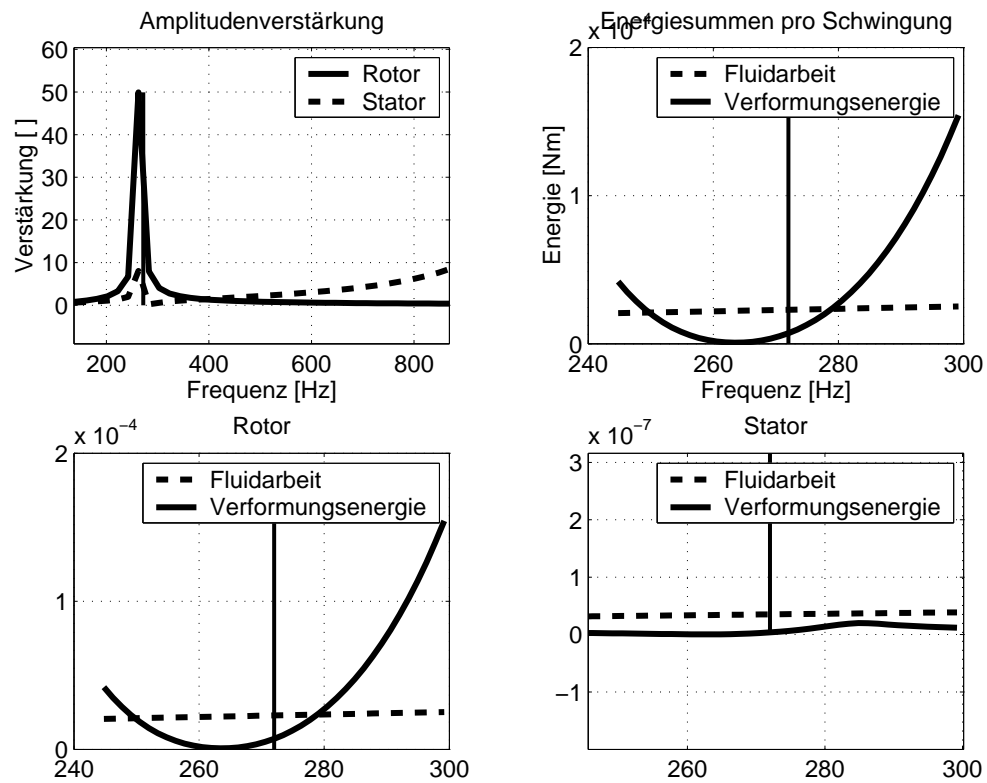


Abbildung 6.10: Amplitudenverstärkung und Energie-Vergleich der ND-Strukturkombination Rotor14/Stator88 (3 bar Einstromdruck und Knotenzahl 3)

7 Zusammenfassung

Trotz bestehender Stabilitäts- und Auslegungskriterien für berührungsfreie Labyrinthdichtungen treten in Einzelfällen Schwingungs- und Stabilitätsprobleme bei solchen Dichtungen auf. Während mechanische Anregungen durch Betriebskräfte der Maschine und Strömungs-Struktur-Interaktionen im Labyrinth bereits in vielen Fällen Gegenstand von Untersuchungen waren, wurde dem Einfluss akustischer Effekte auf eine mögliche Kopplung und Schwingungsanregung der Strukturen bislang nur wenig Aufmerksamkeit geschenkt. In dieser Arbeit wird eine Form der Fluid-Struktur-Interaktion beschrieben, deren Dynamik in sehr hohem Maße durch die Anregung modaler Druckfelder in Hohlräumen zwischen den Strukturoberflächen bestimmt wird.

Der als Kavität bezeichnete Hohlraum zwischen den Strukturoberflächen ist von den Kammern des Dichtungslabyrinthes zu unterscheiden. Die Kavität weist zumeist eine große Interaktionsfläche mit den Strukturen auf, so dass ein ausgedehntes Druckfeld zu beträchtlichen dynamischen Kräften auf die angrenzenden Strukturen führt. Die Druckfelder stellen Eigenschwingungen des Fluides in der Kavität dar. Sie können, ebenso wie die Strukturmoden, durch geeignete mathematische Modelle beschrieben und mit FE-Berechnungen in numerischen Modalanalysen bestimmt werden. Die Schwingungen des Dichtungssystems stellen daher eine gekoppelte modale Schwingung dar, die durch die Energie der Fluidströmung im Labyrinth angefacht wird. Da die Anregung der Schwingungen durch eine Energieübertragung aus dem durchströmenden Fluid auf die Strukturen erfolgt, handelt es sich um selbsterregte Schwingungen.

An einem Prüfstand wird die gekoppelte Schwingung der Dichtungsstrukturen untersucht. Beide Strukturen sind fest mit dem Prüfstand verschraubt, so dass keine Rotationsinflüsse auf den Mechanismus der Kopplung auftreten können. An dem Prüfstand wurde die bestehende Sensorausstattung um mehrere Drucksensoren erweitert, um die modalen Druckfelder in der Kavität zu messen und zu identifizieren. Die Methode der Identifikation der Moden beruht auf der Überlagerung von Schwingungen zu umlaufenden Wellen. Diese Struktur- oder Druckwellen führen an den Sensoren zu Signalen mit festem Phasenbezug, durch den die Schwingungsordnung der Moden identifiziert werden kann. Die Druckamplituden an verschiedenen axialen Sensorpositionen ermöglichen die Identifikation der axialen Druckverläufe, so dass die räumliche Gestalt der Druckfelder präzise bestimmt werden kann.

Die Messungen zeigen, dass die Druckfelder beträchtliche Druckamplituden aufweisen und die Druckschwingungen gleich- oder gegenphasig zu den Strukturschwingungen auftreten. Bildet man einen Quotienten aus Druckkräften und Strukturverschiebungen, so können die Interaktionskräfte als wegproportionale Steifigkeit interpretiert

werden. Quantitativ erreicht die Fluidsteifigkeit die Größenordnung der Struktursteifigkeiten, so dass die dynamischen Eigenschaften des gekoppelten Systems von denen der modalen Komponenten deutlich verschieden sind. Der genaue Wert der Fluid-Koppelsteifigkeit hängt von den Eigenformen des Druckfeldes und der Strukturen ab. Die Druckeigenformen weisen in Abhängigkeit von den Druck- und Strömungsparametern im Labyrinth sehr deutliche Unterschiede auf. Eine genaue Bestimmung der Koppelsteifigkeit setzt daher Modelle der Druckfelder voraus, die den Einfluss von Druck- und Strömungsfeldgrößen berücksichtigen.

Das mathematische Modell zur Berechnung der modalen Druckfelder basiert auf einer Eigenwertformulierung der akustischen Wellengleichung. Die geläufige Form dieser Eigenwertgleichung erwies sich als unzureichend für die Berechnung der beobachteten Druckmoden. Aufgrund der großen Druckamplituden dürfen die Weg- und Geschwindigkeitsamplituden der Fluidteilchen im Druckfeld nicht vernachlässigt werden. Änderungen bei der Herleitung der Wellengleichung führen zu einer Formulierung, die um den Einfluss der Schwingung der Fluidteilchen und der Interaktion mit der Dichtspaltströmung erweitert ist. Die daraus resultierende erweiterte Eigenwertgleichung ermöglicht Finite-Elemente-Berechnung der Druckeigenformen in der Kavität, die sehr gut mit den gemessenen Eigenformen übereinstimmen.

Mit den Modellen der Druck- und Strukturmoden kann die Koppelsteifigkeit auf Basis der FE-Diskretisierung elementweise berechnet werden. Mit den bekannten Strukturmassen und den modalen Eigenfrequenzen können die Struktursteifigkeiten bestimmt werden. Die Fluid-Erregerkräfte werden aus den Druckkräften der periodischen Strömungsänderung in der Labyrinthkammer berechnet. Auf diese Weise können die Koeffizienten gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Strukturbewegungen bestimmt werden, die durch die Steifigkeit des Druckfeldes gekoppelt sind und die Fluidkräfte im Labyrinth als Erregerkräfte enthalten. Mit diesem einfachen Modell mit zwei Freiheitsgraden werden Simulationsrechnungen der gemessenen Schwingungszustände des gekoppelten Systems durchgeführt. Ein Vergleich der berechneten und um die dynamische Verstärkung reduzierten Schwingungsenergien mit der zugeführten Fluidarbeit zeigt, dass die gemessenen Schwingungen stets grenzstabile Gleichgewichtszustände des Systems darstellen. Die Ergebnisse der Simulationsrechnungen rechtfertigen die Aussage, dass außerhalb der Labyrinthkammern ein bislang nicht beschriebener Interaktions- und Kopplungsmechanismus auftreten kann, der zu beträchtlichen Schwingungen der Dichtungsstrukturen führt.

Literaturverzeichnis

- [ABB81] Abbott, D.R.: Advances in Labyrinth Seal Aeroelastic Instability Prediction and Prevention, ASME Journal of Engineering for Power, S.308-312, April 1981.
- [ALF75] Alford, J.S.: Nature, Causes and Prevention of Labyrinth Air Seal Failures, Journal of Aircraft, Vol. 12, No. 4, S. 313 - 318, April 1975
- [ALZ02] Alzahabi, B., Natarajan, L.: Analytical Solution of Circular Cylindrical Shell Vibrations, Proceedings of ISMA, S. 2239-2245, Leuven, Belgium, 2002
- [BAT02] Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2002
- [BEH91] Behnke, B.: Dichtungsflattern in Gasturbinen, VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11, Nr. 148, 1991
- [DIE88] Dietzen, F.-J.: Bestimmung Der Dynamischen Koeffizienten Von Dichtspalten Mit Finite-Differenzen-Verfahren, VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11, Nr. 103, 1988
- [ECK99] Eckert, L.: High Cycle Fatigue Cracks At Radial Fan Impellers Caused By Aeroelastic Self-Excited Impeller Vibrations, Part I: Case History, Root Cause Analysis, Vibration Measurements, ASME Design Engineering Technical Conference, 12. - 15. September, Las Vegas, Nevada
- [EHR68] Ehrich, F.: Aeroelastic Instability in Labyrinth Seals, ASME Journal of Engineering for Power, S. 369-374, Oktober 1968
- [FEM00] FEMLAB, Reference Manual, Version 2.0, COMSOL AB, Stockholm, Sweden, 2000
- [FEY87] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: Vorlesungen über Physik, Bd. II, R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1987
- [BER70] Gobrecht, H.: Bergmann-Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Verlag Walter de Gruyter, Berlin, 1970
- [HAH92] Hahn, H. G.: Technische Mechanik fester Körper, Carl Hanser Verlag München Wien, 1992
- [HAE91] Hahne, E.: Technische Thermodynamik, Addison-Wesley Publishing Company, 1991.

- [KIS97] Kissel, M.: Experimentelle Untersuchung des Schwingungs- und Flatterverhaltens von kompressibel durchströmten Durchblicklabyrinthdichtungen, Dissertation, Universität Kaiserslautern, Fortschritt-Berichte, VDI Reihe 11, Nr. 251, 1997
- [KOL93] Kollmann, F. G.: Maschinenakustik, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1993
- [LEW78] Lewis, D. A., Platt, C. E., Smith, E. B.: Aeroelastic Instability in F100 Labyrinth Air Seals, AIAA Paper No. 78-1078, AIAA/SAE 14th Joint Propulsion Conference, Las Vegas, July 25-27, 1978
- [LMS93] LMS CADA-X, Revision 3.2, Benutzerhandbuch, Leuven Measuring Systems, Leuven, Belgium, 1993
- [Ni99] Ni, A.: High Cycle Fatigue Cracks At Radial Fan Impellers Caused By Aeroelastic Self-Excited Impeller Vibrations, Part II: Mechanism And Mathematical Model, ASME Design Engineering Technical Conference, 12. - 15. September, Las Vegas, Nevada
- [NOR93] Nordmann, R.: Methode der finiten Elemente, Vorlesungsskript, Universität Kaiserslautern, 1993
- [NOR02] Gasch, R.; Nordmann, R.; Pfützner, H.: Rotordynamik, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2002
- [SCH99] Schäfer, M.: Numerik im Maschinenbau, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1999
- [WEI89] Weiser, H.P.: Ein Beitrag zur Berechnung der dynamischen Koeffizienten von Labyrinthdichtungssystemen bei turbulenter Durchströmung mit kompressiblen Medien, Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1989.
- [WOE96] Wölfel, H.: Umdruck zur Vorlesung Maschinendynamik, TU Darmstadt, WS 1996/97
- [ZIE98] Ziegler, A.: Ein Beitrag zur Berechnung der Flatterschwingungen turbulent durchströmter Labyrinthspalte, Dissertation, Universität Kaiserslautern, Fortschritt-Berichte, VDI Reihe 11, Nr. 259, 1998

Lebenslauf

Name	Gerhard Schuck
Geburtsdatum	19. Dezember 1965
Geburtsort	Rockenhausen
1972 bis 1986	Schulausbildung, Abitur am Staatlichen Wilhelm-Erb-Gymnasium in Winnweiler
1988 bis 1989	Physikstudium an der Johannes-Gutenberg-Universität in Mainz
1989 bis 1997	Maschinenbaustudium an der Universität Kaiserslautern
1997	Abschluss Diplom-Ingenieur Maschinenbau
1998 bis 2003	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Mechatronik und Maschinenakustik der TU Darmstadt
2004 bis 2008	Freiberufliche Tätigkeit am Fachgebiet Mechatronik im Maschinenbau der TU Darmstadt